Über den ausserordentlichen Nutzen der Interpolationsmethode in der Lehre der Reihen *

Leonhard Euler

Bei der Interpolationsmethode wird eine Relation solcher Art zwischen den Variablen x und y gesucht, dass, wenn der einen x nacheinander die gegebenen Werte

$$a, b, c, d \quad \text{etc.}$$

zugeteilt werden, die andere y daher auch die gegebenen Werte

$$p, q, r, s \quad \text{etc.}$$

erhält, oder, was auf dasselbe zurückgeht, es wird eine Gleichung für eine gekrümmte Linie solcher Art gesucht, die durch wie viele gegebene Punkte auch immer hindurchgehen soll. Umso größer also die Anzahl dieser Punkte war, umso mehr wird die gekrümmte Linie dadurch eingeschränkt. Dennoch habe ich indes bei anderer Gelegenheit bemerkt, obgleich die Anzahl der Punkte ins Unendliche vermehrt wird, dass die durch sie hindurchgehende gekrümmte Linie nicht vollkommen bestimmt wird, sondern immer noch unendlich viele gekrümmte Linien dargeboten werden können, die gleichermaßen durch all dieselben Punkte hindurchgehen werden. Daher, weil die Interpolationsmethode für jeglichen Fall eine bestimmte gekrümmte Linie an die Hand gibt, wird diese Lösung immer für im höchsten Maße partikulär zu halten sein; aber dieser Umstand selbst deutet eine gewisse einzigartige

*Originaltitel: "De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina", erstmals publiziert in „*Opuscula Analytica 1* 1783, pp. 157-210", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 435 - 497", Eneström-Nummer E555, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Beschaffenheit der gefundenen Lösung an, welche eine genauere Betrachtug verdient. Besonders aber hängt diese natürliche Beschaffenheit der Lösung von der Art ab, auf welche die Interpolation durchgeführt wird oder von der Form, die der allgemeinen Gleichung zugeteilt wird, in welcher die gesuchte Gleichung enthalten sein muss. Weil diese Form auf unendlich viele Weisen festgelegt werden kann, möchte ich meine Untersuchungen auf diese Form beschränken

$$y = \alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7 + \epsilon x^9 + \text{etc.},$$

welche selbstredend nur die ungeraden Potenzen von x enthält, sodass, wenn die Werte von y irgendwelchen positiven Werten von x zukommen, dieselben negativ genommen denselben negativen Werten von x entsprechen; dadurch selbst werden unzählige andere gekrümmte Linien ausgeschlossen, die durch dieselben Punkte hindurchgehen würden.

PROBLEM 1

§1 Eine Gleichung zwischen den zwei Variablen x und y von dieser Form zu finden

$$y = \alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7 + \epsilon x^9 + \text{etc.},$$

dass, wenn x die gegebenen Werte

$$a, b, c, d \quad \text{etc.}$$

zugeteilt werden, die andere Variable y ebenso diese gegebenen Werte annimmt

$$p, q, r, s \quad \text{etc.}$$

LÖSUNG

Damit die angenommene allgemeine Gleichung leichter an diesen Fall angepasst werden kann, werde sie in dieser Form dargeboten

$$\begin{aligned} y = Ax + Bx(xx-aa) + {} & Cx(xx-aa)(xx-bb) \\ & + Dx(xx-aa)(xx-bb)(xx-cc) \\ & + Ex(xx-aa)(xx-bb)(xx-cc)(xx-dd) \\ & + \text{etc.}, \end{aligned}$$

welche, auch wenn die unter möglicherweise ins Unendliche fortschreitet, wenn natürlich die Anzahl der Bedingungen unendlich ist, dennoch für die einzelnen vorgelegten Bedingungen die folgenden endlichen Gleichungen an die Hand gibt:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && p = Aa,\\
&\text{II.} && q = Ab + Bb(bb-aa),\\
&\text{III.} && r = Ac + Bc(cc-aa) + Cc(cc-aa)(cc-bb),\\
&\text{IV.} && s = Ad + Bd(dd-aa) + Cd(dd-aa)(dd-bb),\\
& && \qquad + Dd(dd-aa)(dd-bb)(dd-cc),\\
& && \qquad \text{etc.},
\end{aligned}$$

welche man so darstelle:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \frac{p}{a} = A,\\
&\text{II.} && \frac{q}{b} = A + B(bb-aa),\\
&\text{III.} && \frac{r}{c} = A + B(cc-aa) + C(cc-aa)(cc-bb),\\
&\text{IV.} && \frac{s}{d} = A + B(dd-aa) + C(dd-aa)(dd-bb)\\
& && \qquad + D(dd-aa)(dd-bb)(dd-cc)\\
& && \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Nun werde die erste von den einzelnen folgenden subtrahiert und die Differenzen durch die Koeffizienten von B dividiert, dass diese Gleichungen hervorgehen:

$$\begin{aligned}
\frac{aq-bp}{ab(bb-aa)} &= q' = B,\\
\frac{ar-cp}{ac(cc-aa)} &= r' = B + C(cc-bb),\\
\frac{as-dp}{ad(dd-aa)} &= s' = B + C(dd-bb) + D(dd-bb)(dd-cc)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nun, auf die gleiche Weise die erste von den folgenden subtrahierend und die Reste durch die Koeffizienten von C dividierend, werden wir zu diesen

Gleichungen gelangen:

$$\frac{r'-q'}{cc-bb}=r''=C,$$
$$\frac{s'-q'}{dd-bb}=d''=C+D(dd-cc)$$
$$\text{etc.}$$

und weiter zu dieser

$$\frac{s''-r''}{dd-cc}=D.$$

Deswegen werden aus den gegebenen Größen a, b, c, d etc. und p, q, r, s etc. die Koeffizienten A, B, C, D etc. am angenehmsten so bestimmt werden: Zuerst werden aus den gegebenen Größen diese deriviert:

$$P=\frac{p}{a},\quad Q=\frac{q}{b},\quad R=\frac{r}{c},\quad S=\frac{s}{d}\quad \text{etc.}$$

und daher werden diese gebildet:

$$\begin{aligned}
Q' &= \frac{Q-P}{bb-aa}, & R' &= \frac{R-P}{cc-aa}, & S' &= \frac{S-P}{dd-aa}, & T' &= \frac{T-P}{ee-aa} \quad \text{etc.,}\\
R'' &= \frac{R'-Q'}{cc-bb}, & S'' &= \frac{S'-Q'}{dd-bb}, & T'' &= \frac{T'-Q'}{ee-bb}, \quad \text{etc.,}\\
S''' &= \frac{S''-R''}{dd-cc}, & T''' &= \frac{T''-R''}{ee-cc}, \quad \text{etc.,}\\
T'''' &= \frac{T'''-S'''}{ee-dd}, \quad \text{etc.,}
\end{aligned}$$

Nach Finden dieser Werte werden wir haben

$$A=P,\quad B=Q',\quad C=R'',\quad D=S''',\quad E=T''''\quad \text{etc.}$$

KOROLLAR 1

§2 Weil $P=\frac{p}{a}$ ist, wird der erste Koeffizient dieser sein

$$A=\frac{p}{a};$$

für die folgenden hingegen wegen

$$Q' = \frac{aq - bp}{ab(bb - aa)}, \quad R' = \frac{ar - cp}{ac(cc - aa)}, \quad S' = \frac{as - dp}{ad(dd - aa)}, \quad T' = \frac{at - ep}{ae(ee - aa)} \quad \text{etc.}$$

wird der zweite Koeffizient dieser sein

$$B = \frac{aq - bp}{ab(bb - aa)}$$

oder

$$B = \frac{p}{a(bb - aa)} + \frac{q}{b(bb - aa)}.$$

KOROLLAR 2

§3 Weil weiter ist

$$R'' = \frac{ar - cp}{ac(cc - aa)(cc - bb)} - \frac{aq - bp}{ab(bb - aa)(cc - bb)},$$

wird werden

$$C = \frac{p}{a(aa - bb)(aa - cc)} + \frac{q}{b(bb - aa)(bb - cc)} + \frac{r}{c(cc - aa)(cc - bb)}$$

KOROLLAR 3

§4 Indem die Rechnung auf die gleiche Weise weiter verfolgt wird, wird aufgefunden werden

$$\begin{aligned} D = {} & \frac{p}{a(aa - bb)(aa - cc)(aa - dd)} + \frac{q}{b(bb - aa)(bb - cc)(bb - dd)} \\ & + \frac{r}{c(cc - aa)(cc - bb)(cc - dd)} + \frac{s}{d(dd - aa)(dd - bb)(dd - cc)}, \end{aligned}$$

woher sich schon sicher eine Vermutung über die Form der folgenden Größen E, F, G etc. anstellen lässt.

BEMERKUNG 1

§5 Meistens werden aber die Werte der einzelnen Koeffizienten A, B, C, D, E, etc. bequemer aus den vorhergehenden bestimmt. Denn aus den fundamentalen Gleichungen werden die folgenden Formeln abgeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{p}{a},\\
B &= \frac{q-bA}{b(bb-aa)},\\
C &= \frac{r-cA}{c(c-aa)(cc-bb)} - \frac{B}{cc-bb},\\
D &= \frac{s-dA}{d(dd-aa)(dd-bb)(dd-cc)} - \frac{B}{(dd-bb)(dd-cc)} - \frac{C}{dd-cc},\\
E &= \frac{t-eA}{e(ee-aa)(ee-bb)(ee-cc)(ee-dd)} - \frac{B}{(ee-bb)(ee-cc)(ee-dd)}\\
&\quad - \frac{C}{(ee-cc)(ee-dd)} - \frac{D}{ee-dd}\\
&\text{etc.,}
\end{aligned}
$$

wo meistens schnell eine Struktur solcher Art beobachtet wird, woher die folgenden leicht deriviert werden können, so wie aus den folgenden Problemen, in denen ich diese Methode auf gewisse partikuläre Fälle anwenden werde, klar zu tage treten wird.

BEMERKUNG 2

§6 Bevor ich aber Fälle von dieser Art entwickle, wird es förderlich sein bemerkt zu haben, dass, wenn für jeglichen sich ergebenden Fall die Genüge leistende Gleichung zwischen den zwei Variablen x und y gefunden worden war, die ich auf diese Weise bezeichnen werde

$$y = X,$$

sodass gilt,

$$X = \alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 + \delta x^7 + \text{etc.},$$

dann daher leicht eine sich um Vieles weiter erstreckende und gleichermaßen Genüge leistende Gleichung gebildet werden kann. Es werde nämlich festgelegt

$$Q = x \cdot \frac{xx - aa}{aa} \cdot \frac{xx - bb}{bb} \cdot \frac{xx - cc}{cc} \cdot \frac{xx - dd}{dd} \cdot \text{etc.},$$

welche Größe für alle vorgelegten Werte von x verschwindet

$$x = 0, \quad x = \pm a, \quad x = \pm b, \quad x = \pm c \quad \text{etc.},$$

und dasselbe werden alle zusammen mit Q selbst verschwindenden Funktionen von Q leisten; daher ist es offenbar, wenn festgelegt wird

$$y = X + Q$$

oder

$$y = X + f : Q,$$

dass allen Bedingungen gleichermaßen Genüge geleistet wird. Weil ja also diese Funktion $f : Q$ ganz und gar beliebig ist, solange sie nur für $Q = 0$ verschwindet, ist diese Gleichung

$$y = X + f : Q$$

die allgemeinste Lösung darzubieten anzusehen.

PROBLEM 2

§7 Es seien a, b, c, d etc. wie viele Kreisbogen auch immer, während der Radius $= 1$ ist, die Werte p, q, r, s etc. seien aber die Sinus derselben Bogen, weil in diesem Fall die Eigenschaft Geltung hat, dass den negativen Bogen dieselben Sinus negativ genommen entsprechen, dann daher näherungsweise das Verhältnis zwischen Durchmesser und Peripherie zu definieren.

LÖSUNG

Weil hier gilt

$$p = \sin a, \quad q = \sin b, \quad r = \sin c \quad \text{etc.},$$

wird die Gleichung zwischen x und y so beschaffen sein, dass, nachdem für x ein Kreisbogen genommen worden ist, die Größe y näherungsweise ihren Sinus ausdrücken wird und es dann wird

$$y = \sin x.$$

Nachdem also durch das vorhergehende Problem diese Koeffizienten bestimmt worden sind

$$A, \quad B, \quad C, \quad D \quad \text{etc.}$$

wird man diese Gleichung haben

$$\sin x = Ax + Bx(xx - aa) + Cx(xx - aa)(xx - bb) + \text{etc.},$$

welche also mit der Wahrheit verträglich ist, sooft war

$$\text{entweder} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \pm a \quad \text{oder} \quad x = \pm b \quad \text{oder} \quad x = \pm c \quad \text{etc.}$$

Wir wollen nun den Bogen x unendlich klein festlegen, und weil dann sein Sinus, $\sin x$, dem Bogen x gleich wird, wird diese Gleichung entspringen

$$1 = A - Baa + Caabb - Daabbcc + Eaabbccdd - \text{etc.}$$

Wir wollen hie für die Buchstaben A, B, C, D etc. die oben gefundenen Werte einsetzen und wir werden zu dieser Gleichung gelangen

$$\begin{aligned}
1 = \frac{p}{a}&\left(1 - \frac{aa}{aa-bb} + \frac{aabb}{(aa-bb)(aa-cc)} - \frac{aabbcc}{(aa-bb)(aa-cc)(aa-dd)} + \text{etc.}\right)\\
-\frac{q}{b}&\left(\frac{aa}{bb-aa} - \frac{aabb}{(bb-aa)(bb-cc)} + \frac{aabbcc}{(bb-aa)(bb-cc)(bb-dd)} - \text{etc.}\right)\\
+\frac{r}{c}&\left(\frac{aabb}{(cc-aa)(cc-bb)} - \frac{aabbcc}{(cc-aa)(cc-bb)(cc-dd)} + \text{etc.}\right)\\
-\frac{s}{d}&\left(\frac{aabbcc}{(dd-aa)(dd-bb)(dd-dd)} - \text{etc.}\right)\\
+\,&\text{etc.},
\end{aligned}$$

welche auf diese zurückgeführt wird, in welcher alle Reihen einander ähnlich sind,

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{p}{a}&\left(1 - \frac{aa}{aa-bb} + \frac{aabb}{(aa-bb)(aa-cc)} - \frac{aabbcc}{(aa-bb)(aa-cc)(aa-dd)} + \text{etc.}\right)\\
&- \frac{aaq}{b(bb-aa)}\left(1 + \frac{bb}{cc-bb} + \frac{bbcc}{(cc-bb)(dd-bb)} + \frac{bbccdd}{(cc-bb)(dd-bb)(ee-bb)} + \text{etc.}\right)\\
&+ \frac{aabbr}{c(cc-bb)(cc-bb)}\left(1 + \frac{cc}{dd-cc} + \frac{ccdd}{(dd-cc)(ee-cc)} + \text{etc.}\right)\\
&- \frac{aabbccs}{d(dd-aa)(dd-bb)(dd-cc)}\left(1 + \frac{dd}{ee-dd} + \text{etc.}\right)\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Aber jede beliebige dieser Reihen ist von selbst summierbar; denn die zwei Terme der ersten gegen zusammengenommen

$$\frac{bb}{bb-aa};$$

wenn diesem der dritte hinzuaddiert wird, geht hervor

$$\frac{bbcc}{(bb-aa)(cc-aa)}$$

und daher liefert weiter der vierte Term hinzugefügt

$$\frac{bbccdd}{(bb-aa)(cc-aa)(dd-aa)}$$

und so weiter, sodass die erste Reihe unserer Gleichung wird

$$\frac{p}{a} \cdot \frac{bb}{bb-aa} \cdot \frac{cc}{cc-aa} \cdot \frac{dd}{dd-aa} \cdot \frac{ee}{ee-aa} \cdot \text{etc.}$$

In der Tat wird auf die gleiche Weise für die zweite Reihe aufgefunden

$$-\frac{q}{b} \cdot \frac{aa}{bb-aa} \cdot \frac{cc}{cc-bb} \cdot \frac{dd}{dd-bb} \cdot \frac{ee}{ee-bb} \cdot \text{etc.}$$

und so wird schließlich unsere Gleichung auf die Form zurückgeführt

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{p}{q} \cdot \frac{bb}{bb-aa} \cdot \frac{cc}{cc-aa} \cdot \frac{dd}{dd-aa} \cdot \frac{ee}{ee-aa} \cdot \text{etc.}\\
+ \frac{q}{b} \cdot \frac{aa}{bb-aa} \cdot \frac{cc}{cc-bb} \cdot \frac{dd}{dd-bb} \cdot \frac{ee}{ee-bb} \cdot \text{etc.}\\
+ \frac{r}{c} \cdot \frac{aa}{aa-cc} \cdot \frac{bb}{bb-cc} \cdot \frac{dd}{dd-cc} \cdot \frac{ee}{ee-cc} \cdot \text{etc.}\\
+ \frac{s}{d} \cdot \frac{aa}{aa-dd} \cdot \frac{bb}{bb-dd} \cdot \frac{cc}{cc-dd} \cdot \frac{ee}{ee-dd} \cdot \text{etc.}\\
+ \frac{t}{e} \cdot \frac{aa}{aa-ee} \cdot \frac{bb}{bb-ee} \cdot \frac{cc}{cc-ee} \cdot \frac{dd}{dd-ee} \cdot \text{etc.}\\
+\text{etc.},
\end{aligned}
$$

woher, wenn die gegebenen Bogen a, b, c, d etc. in einem bekannten Verhältnis zur Semiperipherie π stehen, der Wert dieser Größe π definiert werden wird.

KOROLLAR 1

§8 Wenn die Anzahl dieser Bogen a, b, c, d etc. endlich war, dann wird die Peripherie des Kreises umso genauer definiert werden, umso größer jene Anzahl ist und zugleich umso kleinere Bogen unter ihnen auftauchen. Nachdem aber die Anzahl der vorgelegten Bogen ins Unendliche vermehrt worden ist, wird das wahre Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser deriviert werden.

§9 Auf die gleiche Weise kann im Allgemeinen der Sinus des unbestimmten Bogens x definiert werden. Nachdem nämlich anstelle der Koeffizienten A,B, C, D etc. die gefundenen Werte eingesetzt worden sind, wird die Gleichung in diese Form gebracht werden werden

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin x}{x} = \frac{p}{a} \cdot \frac{bb-xx}{bb-aa} \cdot \frac{cc-xx}{cc-aa} \cdot \frac{dd-xx}{dd-aa} \cdot \text{etc.}\\
+ \frac{q}{b} \cdot \frac{aa-xx}{aa-bb} \cdot \frac{cc-xx}{cc-bb} \cdot \frac{dd-xx}{dd-bb} \cdot \text{etc.}\\
+ \frac{r}{c} \cdot \frac{aa-xx}{aa-cc} \cdot \frac{bb-xx}{bb-cc} \cdot \frac{dd-xx}{dd-cc} \cdot \text{etc.}\\
+ \frac{s}{d} \cdot \frac{aa-xx}{aa-dd} \cdot \frac{bb-xx}{bb-dd} \cdot \frac{cc-xx}{cc-dd} \cdot \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$+\text{etc.},$$

welche Gleichung für verschwindend genommenen Bogen x in jene übergeht.

KOROLLAR 3

§10 Aber diese Reduktion erstreckt sich um Vieles weiter, nachdem die Bogen nicht berücksichtigt worden sind. Wenn nämlich eine Gleichung solcher Art zwischen den zwei Variablen x und y gesucht wird, dass nach Nehmen von

$$x = 0, \quad a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e \quad \text{etc.}$$

wird

$$x = 0, \quad p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad t \quad \text{etc.},$$

wird diese Gleichung im Allgemeinen so dargestellt werden können

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x} = \frac{p}{a} &\cdot \frac{bb-xx}{bb-aa} \cdot \frac{cc-xx}{cc-aa} \cdot \frac{dd-xx}{dd-aa} \cdot \frac{ee-xx}{ee-aa} \cdot \text{etc.} \\
+ \frac{q}{b} &\cdot \frac{aa-xx}{aa-bb} \cdot \frac{cc-xx}{cc-bb} \cdot \frac{dd-xx}{dd-bb} \cdot \frac{ee-xx}{ee-bb} \cdot \text{etc.} \\
+ \frac{r}{c} &\cdot \frac{aa-xx}{aa-cc} \cdot \frac{bb-xx}{bb-cc} \cdot \frac{dd-xx}{dd-cc} \cdot \frac{ee-xx}{ee-cc} \cdot \text{etc.} \\
+ \frac{s}{d} &\cdot \frac{aa-xx}{aa-dd} \cdot \frac{bb-xx}{bb-dd} \cdot \frac{cc-xx}{cc-dd} \cdot \frac{ee-xx}{ee-dd} \cdot \text{etc.} \\
&+\text{etc.},
\end{aligned}$$

aus welcher Form es zugleich offenbar ist, wie sie den einzelnen Bedingungen Genüge leistet.

BEMERKUNG

§11 Ich werde mich hier mit den Fällen nicht weiter aufhalten, in denen die Anzahl der vorgeschriebenen Bedingungen a, b, c, d etc. endlich angenommen wird, weil ja daher nur Approximationen für das Maß des Kreises an die Hand gegeben werden. Dennoch wird es indes nicht reuen bemerkt zu haben, wenn nur vier Bogen angenommen werden, welche seien

$$a = \varphi, \quad b = 2\varphi, \quad c = 3\varphi, \quad d = 4\varphi$$

dass aus der Lösung des Problems sein wird

$$\begin{aligned}\varphi = &\frac{\sin\varphi}{1} \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\\ -&\frac{\sin 2\varphi}{2}\cdot\frac{1\cdot 1}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{1\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 4}{2\cdot 6}\\ +&\frac{\sin 3\varphi}{3}\cdot\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 4}{1\cdot 7}\\ -&\frac{\sin 4\varphi}{4}\cdot\frac{1\cdot 1}{3\cdot 5}\cdot\frac{2\cdot 2}{2\cdot 6}\cdot\frac{3\cdot 3}{1\cdot 7}\end{aligned}$$

$$= \frac{8}{5}\sin\varphi - \frac{2}{5}\sin 2\varphi + \frac{8}{105}\sin 3\varphi - \frac{1}{140}\sin 4\varphi,$$

welcher Ausdruck umso näher an die Wahrheit herankommt, umso kleiner der Winkel φ genommen wird; dennoch wird indes, auch wenn er bis zum Quandranten vermehrt wird, dass gilt

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

nicht sehr groß; es geht nämlich hervor

$$\frac{\pi}{2} = \frac{8}{5} - \frac{8}{105} = \frac{32}{21}$$

und so

$$\pi = 3\frac{1}{21}.$$

Aber wenn wir nehmen

$$\varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6},$$

wird

$$\frac{\pi}{6} = \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{105} - \frac{1}{140}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

oder

$$\pi = \frac{184}{35} - \frac{171\sqrt{3}}{140},$$

welcher Wert nur einige Hunderttausendstel vom wahren abweicht. Aber nachdem wir diese Betrachtung hinter uns gebracht haben, möchte ich einige Fälle, wo die Anzahl der vorgelegten nach einem gewissen Gesetz fortschreitenden Bogen a, b, c, d etc. unendlich ist, durchgehen.

BEISPIEL I

§12 Es mögen die Bogen a, b, c, d etc. nach der Reihe der natürlichen Zahlen fortschreiten und es sei

$$a = \varphi, \quad b = 2\varphi, \quad c = 3\varphi, \quad a = 4\varphi, \quad \text{etc.} \quad \text{ins Unendliche;}$$

aus deren Sinus p, q, r etc. soll die wahre Länge des Bogens φ bestimmt werden müssen.

Die Lösung des Problems gibt also für diesen Fall diese Gleichung and die Hand

$$\begin{aligned}\varphi = & \frac{\sin\varphi}{1} \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{5\cdot 5}{4\cdot 6} \cdot \text{etc.} \\ & - \frac{\sin 2\varphi}{2} \cdot \frac{1\cdot 1}{1\cdot 3} \cdot \frac{3\cdot 3}{1\cdot 5} \cdot \frac{4\cdot 4}{2\cdot 6} \cdot \frac{5\cdot 5}{3\cdot 7} \cdot \text{etc.} \\ & + \frac{\sin 3\varphi}{3} \cdot \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 5} \cdot \frac{4\cdot 4}{1\cdot 7} \cdot \frac{5\cdot 5}{2\cdot 8} \cdot \text{etc.} \\ & - \frac{\sin 4\varphi}{4} \cdot \frac{1\cdot 1}{3\cdot 5} \cdot \frac{2\cdot 2}{2\cdot 6} \cdot \frac{3\cdot 3}{1\cdot 7} \cdot \frac{5\cdot 5}{1\cdot 9} \cdot \text{etc.} \\ & + \frac{\sin 5\varphi}{5} \cdot \frac{1\cdot 1}{4\cdot 6} \cdot \frac{2\cdot 2}{3\cdot 7} \cdot \frac{3\cdot 3}{2\cdot 8} \cdot \frac{4\cdot 4}{1\cdot 9} \cdot \text{etc.} \\ & + \text{etc.;}\end{aligned}$$

aber all diese Produkte werden aufgefunden, den Wert $= 2$ zu haben, sodass gilt

$$\frac{1}{2}\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi - \text{etc.},$$

die Gültigkeit welcher Reihe, im Fall, in welchem der Winkel φ unendlich klein ist, per se offenbar ist. Wir wollen also die folgenden Fälle entwickeln:

1. Es sei

$$\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

und es geht die Leibniz'sche Reihe hervor

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

2. Es sei

$$\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

und es wird diese Reihe entspringen

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} * - \frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7\sqrt{2}} * + \frac{1}{9\sqrt{2}} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11\sqrt{2}} - \text{etc.},$$

welche in diese zwei aufgelöst wird

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}\right),$$

sodass gilt

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

3. Es sei

$$\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

und es wird sein

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} * + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

4. Es sei

$$\varphi = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$$

und es wird

$$\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} * - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \text{etc.}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \text{etc.}\right)\\ - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{etc.}\right)\\ + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}\right),\end{aligned}$$

die letzte welcher Reihen $= \frac{\pi}{12}$; daher wird gefolgert

$$1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \text{etc.} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \text{etc.}\right).$$

In der Tat wird jede der beiden dem Bogen $\frac{\pi}{3}$ gleich, was freilich in der ersten aus der Leibniz'schen offenbar ist.

KOROLLAR 1

§13 Aus der hier gefundenen Gleichung

$$\frac{1}{2}\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

können mehrere andere nicht weniger bemerkenswerte deriviert werden. So wie beispielsweise nach Ausführen einer Differentiation hervorgeht

$$\frac{1}{2} = \cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos\varphi + \text{etc.},$$

deren Begründung auch daher offenbar ist, weil, indem auf beiden Seiten mit $2\cos\frac{1}{2}\varphi$ multipliziert wird, die identische Gleichung $\cos\frac{1}{2}\varphi = \cos\frac{1}{2}\varphi$ hervorgeht.

KOROLLAR 2

§14 Aber wenn wir jene Gleichung, mit $-\mathrm{d}\varphi$ multipliziert, integrieren, geht hervor

$$C - \frac{1}{4}\varphi\varphi = \cos\varphi - \frac{1}{4}\cos 2\varphi + \frac{1}{9}\cos 3\varphi - \frac{1}{16}\cos 4\varphi + \text{etc.},$$

wo aus dem Fall $\varphi = 0$ die durch die Integration eingegangene Konstante bestimmt wird, es ist natürlich

$$\mathrm{C} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12},$$

so dass ist

$$\frac{\pi\pi}{12} - \frac{\varphi\varphi}{4} = \cos\varphi - \frac{1}{4}\cos 2\varphi + \frac{1}{9}\cos 3\varphi - \frac{1}{16}\cos 4\varphi + \text{etc.},$$

welche Reihe also nach Nehmen von $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 0$ wird. Es ist aber näherungsweise

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} = 103^{\circ}55'23'' \quad \text{und} \quad \cos\frac{\pi}{\sqrt{3}} = -0,2406185.$$

KOROLLAR 3

§15 Wenn wir diese Gleichung, erneut mit $\mathrm{d}\varphi$ multipliziert, integrieren, wird diese neue Summation entspringen

$$\frac{1}{12}\pi\pi\varphi - \frac{1}{12}\varphi^3 = \sin\varphi - \frac{1}{8}\sin 2\varphi + \frac{1}{27}\sin 3\varphi - \frac{1}{64}\sin 4\varphi + \text{etc.},$$

woher nach Nehmen des Bogen

$$\varphi = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$$

erhalten wird

$$\frac{1}{32}\pi^3 = 1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \text{etc.},$$

wie schon anderswoher bekannt ist.

BEMERKUNG

§16 Über die gefundene Reihe

$$\frac{1}{2}\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \text{etc.}$$

kann Zweifel aufkommen, weil nach Nehmen des Bogens $\varphi = 180^\circ = \pi$ die einzelnen Terme der Reihe verschwinden und daher die Summe nicht $\frac{1}{2}\pi$ gleich werden kann. Aber um diesen Zweifel aufzulösen werde zuerst $\varphi = \pi - \omega$ gesetzt und es wird diese Gleichung resultieren

$$\frac{\pi - \omega}{2} = \sin\omega + \frac{1}{2}\sin 2\omega + \frac{1}{3}\sin 3\omega + \frac{1}{4}\sin 4\omega + \text{etc.}$$

nun werde aber der Bogen ω unendlich klein genommen, woher wir diese Gleichung erlangen

$$\frac{\pi - \omega}{2} = \omega + \omega + \omega + \omega + \omega + \text{etc.},$$

welche nicht weiter etwas Absurdes enthält. Dasselbe ist festzuhalten, wenn wir $\varphi = 2\pi$ oder $\varphi = 3\pi$ etc. nehmen wollen.

Beispiel II

§17 Wenn die Bogen a, b, c, d etc. irgendeine arithmetische Progression festlegen, dass gilt

$$a = n\varphi, \quad b = (n+1)\varphi, \quad c = (n+2)\varphi, \quad d = (n+3)\varphi \quad \text{etc.}$$

aus deren Sinus die Länge des Bogens ϖ zu bestimmen.

Die zuvor dargebotene allgemeine Lösung gibt für diesen Fall

$$
\begin{aligned}
\varphi = {} & \frac{\sin n\varphi}{n} \cdot \frac{(n+1)^2}{1(1+2n)} \cdot \frac{(n+2)^2}{2(2+2n)} \cdot \frac{(n+3)^2}{3(3+2n)} \cdot \frac{(n+4)^2}{4(4+2n)} \cdot \frac{(n+5)^2}{5(5+2n)} \cdot \text{etc.} \\
& - \frac{\sin(n+1)\varphi}{n+1} \cdot \frac{n^2}{1(1+2n)} \cdot \frac{(n+2)^2}{1(3+2n)} \cdot \frac{(n+3)^2}{2(4+2n)} \cdot \frac{(n+4)^2}{3(5+2n)} \cdot \frac{(n+5)^2}{4(6+2n)} \cdot \text{etc.} \\
& + \frac{\sin(n+2)\varphi}{n+2} \cdot \frac{n^2}{2(2+2n)} \cdot \frac{(n+1)^2}{1(3+2n)} \cdot \frac{(n+3)^2}{1(5+2n)} \cdot \frac{(n+4)^2}{2(6+2n)} \cdot \frac{(n+5)^2}{3(7+2n)} \cdot \text{etc.} \\
& - \frac{\sin(n+3)\varphi}{n+3} \cdot \frac{n^2}{3(3+2n)} \cdot \frac{(n+1)^2}{2(4+2n)} \cdot \frac{(n+2)^2}{1(5+2n)} \cdot \frac{(n+4)^2}{1(7+2n)} \cdot \frac{(n+5)^2}{2(8+2n)} \cdot \text{etc.} \\
& + \frac{\sin(n+4)\varphi}{n+4} \cdot \frac{n^2}{4(4+2n)} \cdot \frac{(n+1)^2}{3(5+2n)} \cdot \frac{(n+2)^2}{2(6+2n)} \cdot \frac{(n+3)^2}{1(7+2n)} \cdot \frac{(n+5)^2}{1(9+2n)} \cdot \text{etc.} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Um die Werte dieser ins Unendliche laufenden Produkten ausfindig zu machen, wollen wir der Kürze wegen festlegen

$$\varphi = \mathfrak{A}\frac{\sin n\varphi}{n} - \mathfrak{B}\frac{\sin(n+1)\varphi}{n+1} + \mathfrak{C}\frac{\sin(n+2)\varphi}{n+2} - \mathfrak{D}\frac{\sin(n+3)\varphi}{n+3} + \text{etc.}$$

und diese Koeffizienten werden auf die folgende Weise miteinander verglichen

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{nn}{(n+1)^2} \cdot \frac{2(2+2n)}{1(3+2n)} \cdot \frac{3(3+2n)}{2(4+2n)} \cdot \frac{4(4+2n)}{3(5+2n)} \cdot \text{etc.}$$

welcher Wert zurückgeführt wird auf

$$\frac{nn}{(n+1)^2} \cdot \frac{(i-1)(2+2n)}{1(i+2n)},$$

während i eine unendliche Zahl bezeichnet, und so wird dann sein

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{2nn}{n+1}.$$

Auf die gleiche Weise wird erschlossen

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} = \frac{1(1+2n)}{2(2+2n)} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \cdot \frac{(i-3)((4+2n)}{1(i+2n)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2(n+2)},$$

dann aber weiter

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}} = \frac{(n+2)(2n+2)}{3(n+3)}, \quad \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} = \frac{(n+3)(2n+3)}{4(n+4)}$$

und so weiter; daher folgt, dass sein wird

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= \frac{2nn}{1(n+1)}\mathfrak{A}, \\
\mathfrak{C} &= \frac{2nn(2n+1)}{1\cdot 2(n+1)}\mathfrak{A}, \\
\mathfrak{D} &= \frac{2nn(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3(n+3)}\mathfrak{A}, \\
\mathfrak{E} &= \frac{2nn(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(n+4)}\mathfrak{A} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

und so geht die ganze Aufgabe auf das Finden des ersten Buchstaben zurück

$$\mathfrak{A} = \frac{(n+1)^2}{1(2n+1)} \cdot \frac{(n+2)^2}{2(2n+2)} \cdot \frac{(n+3)^2}{3(2n+3)} \cdot \frac{(n+4)^2}{4(2n+4)} \cdot \text{etc.}$$

Nun habe ich aber schon vor einiger Zeit bewiesen, dass der Wert dieses allgemeinen Produktes

$$\frac{a(b+c)}{b(a+c)} \cdot \frac{(a+d)(b+c+d)}{(b+d)(a+c+d)} \cdot \frac{(a+2d)(b+c+2d)}{(b+2d)(a+c+2d)} \cdot \text{etc.}$$

so ausgedrückt wird, dass es ist

$$= \frac{\int x^{b-1}\mathrm{d}x(1-x^d)^{\frac{c-d}{d}}}{\int x^{a-1}\mathrm{d}x(1-x^d)^{\frac{c-d}{d}}},$$

nachdem natürlich jede der beiden Integrationen von der Grenze $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt worden ist. Daher, weil für unseren Fall Nachstehendes angenommen werden muss

$$a = n+1, \quad b+c = n+1, \quad b = 1, \quad c = n \quad \text{und} \quad d = 1,$$

werden wir haben

$$\mathfrak{A} = \frac{\int \mathrm{d}x(1-x)^{n-1}}{\int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1}} = \frac{1}{n\int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1}}$$

und daher den folgenden Ausdruck für den Bogen φ

$$\varphi \int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1} = \frac{1}{nn}\sin n\varphi - \frac{2n}{1(n+1)^2}\sin(n+1)\varphi$$
$$+\frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2(n+2)^2}\sin(n+2)\varphi - \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3(n+3)^2}\sin(n+3)\varphi$$
$$+\frac{2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(n+4)^2}\sin(n+4)\varphi + \text{etc.}$$

Diese Reihe verdient umso größere Aufmerksamkeit, weil sie die Integralformel $\int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1}$ involviert.

KOROLLAR 1

§18 Über diese Integralformel

$$\int x^n dx(1-x)^{n-1}$$

wird es förderlich sein zuerst bemerkt zu haben, wenn im Fall $n = \lambda$ ihr Wert $= \triangle$ war, dass er dann im Fall

$$n = \lambda + 1$$

sein wird

$$= \frac{\lambda}{2(2\lambda+1)} \triangle \, .$$

So, weil im Fall $n = 1$ gilt

$$\int x dx = \frac{1}{2},$$

wird sein

$$\int x^2 dx(1-x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad \int x^3 dx(1-x)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{2 \cdot 5} \quad \text{etc.}$$

KOROLLAR 2

§19 Wenn also im Allgemeinen festgelegt wird

$$\int x^n dx(1-x)^{n-1} = f : n,$$

weil ihr Wert ja wie eine Funktion von n angesehen werden kann, wird sein

$$f:1=\frac{1}{2},\quad f:2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6},\quad f:3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{10},\quad f:4=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{14}$$

und im Allgemeinen

$$f:(n+1)=\frac{n}{2(2n+1)}f:n.$$

Daher, sooft n eine ganze Zahl ist, wird der Wert dieser Formel $f:n$ leicht angegeben.

Korollar 3

§20 Es sei nun $n=\frac{1}{2}$ und es wird sein

$$f:\frac{1}{2}=\int\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}=2\int\frac{yydy}{\sqrt{1-yy}},$$

nachdem $x=yy$ gesetzt worden ist; aber es ist

$$\int\frac{yydy}{\sqrt{1-yy}}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1-yy}}=\frac{\pi}{4},$$

woher wird

$$f:\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$$

und daher weiter

$$f:\frac{3}{2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2},\quad f:\frac{5}{2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{\pi}{2},\quad f:\frac{7}{2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{\pi}{2}\quad\text{etc.}$$

Aber wenn im Allgemeinen $n = \frac{\mu}{\nu}$ ist, wird aufgefunden

$$f : \frac{\mu}{\nu} = \int x^{\frac{\mu}{\nu}} \mathrm{d}x (1-x)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \mu \int y^{\mu+\nu-1} \mathrm{d}y (1-y^\nu)^{\frac{\mu}{\nu}-1},$$

nachdem $x = y^\nu$ gesetzt worden ist und daher nach einer Reduktion

$$f : \frac{\mu}{\nu} = \frac{\nu}{2} \int y^{\nu-1} \mathrm{d}y (1-y^\nu)^{\frac{\mu}{\nu}-1},$$

welche Form transzendente Größen jeden Geschlechts involviert.

Korollar 4

§21 Der Wert dieser Integralformel

$$\int x^n \mathrm{d}x (1-x)^{n-1}$$

wird aber im Fall $x = 1$ umgekehrt aus der gefundenen Reihe ziemlich elegant bestimmt; nachdem nämlich eine Differentiation durchgeführt worden ist, indem dabei allein der Bogen φ wie eine Variable angesehenen wird, geht hervor

$$\int x^n \mathrm{d}x (1-x)^{n-1} = \frac{1}{n} \cos n\varphi - \frac{2n}{1(n+1)} \cos(n+1)\varphi + \frac{2n(2n+1)}{1 \cdot 2(n+2)} \cos(n+2)\varphi$$
$$- \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3(n+2)} \cos(n+3)\varphi + \text{etc.},$$

welche Reihe also dieser aus der gewohnten Entwicklung selbst entspringenden gleich ist

$$\int x^n \mathrm{d}x (1-x)^{n-1} = \frac{1}{n+1} - \frac{n-1}{1(n+2)} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2(n+3)} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3(n+4)} + \text{etc.}$$

BEMERKUNG 1

§22 Weil wir ja den Fall $n = 1$ im vorhergehenden Beispiel entwickelt haben, wollen wir hier hauptsächlich den Fall

$$n = \frac{1}{2}$$

betrachten, in welchem wir gesehen haben, dass gilt

$$\int x^n \mathrm{d}x (1-x)^{n-1} = \frac{\pi}{2},$$

und es wird deshalb sein

$$\frac{\pi\varphi}{2} = \frac{4}{1}\sin\frac{1}{2}\varphi - \frac{4}{9}\sin\frac{3}{2}\varphi + \frac{4}{25}\sin\frac{5}{2}\varphi - \frac{4}{49}\sin\frac{7}{2}\varphi + \text{etc.}$$

Wir wollen $\varphi = 2\omega$ setzen und es wird diese gefälligere Reihe hervorgehen

$$\frac{\pi\omega}{4} = \frac{1}{1}\sin\omega - \frac{1}{9}\sin 3\omega + \frac{1}{25}\sin 5\omega - \frac{1}{49}\sin 7\omega + \text{etc.},$$

welche zuerst, wenn der Bogen ω verschwindend angenommen wird, gibt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

Es sei aber

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

und es entspringt die auch bekannte Reihe

$$\frac{\pi\pi}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.}$$

Aber nach Nehmen des Bogens

$$\omega = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$$

geht hervor

$$\frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \frac{1}{121} - \frac{1}{169} + \text{etc.}$$

Es sei

$$\omega = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6};$$

es wird sein

$$\begin{aligned}\frac{\pi\pi}{24} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{19^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.}\right) \\ - 1\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{23^2} + \text{etc.}\right),\end{aligned}$$

wo die mittlere $= \frac{\pi\pi}{72}$ und die Begründung der übrigen klar ist. Darauf gibt die Differentiation unserer Reihe diese bemerkenswerte Form an die Hand

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1}\cos\omega - \frac{1}{3}\cos 3\omega + \frac{1}{5}\cos 5\omega - \frac{1}{7}\cos 7\omega + \text{etc.},$$

weil ja gänzlich alle für ω angenommenen Bogen dieselbe Summe liefern. Dann aber liefert eine iterierte Differentiation

$$0 = \sin\omega - \sin 3\omega + \sin 5\omega - \sin 7\omega + \text{etc.}$$

Durch Integration finden wir aber

$$C - \frac{\pi\omega^2}{8} = \frac{1}{1}\cos\omega - \frac{1}{3^3}\cos 3\omega + \frac{1}{5^3}\cos 5\omega - \frac{1}{7^3}\cos 7\omega + \text{etc.},$$

wo, weil nach Nehmen von $\omega = 0$ ist

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \text{etc.} = \frac{\pi^3}{32},$$

sein wird

$$C = \frac{\pi^3}{32},$$

sodass gilt

$$\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi\pi}{4}-\omega\omega\right)=\frac{1}{1}\cos\omega-\frac{1}{3^3}\cos 3\omega+\frac{1}{5^3}\cos 5\omega-\frac{1}{7^3}\cos 7\omega+\text{etc.}$$

BEMERKUNG 2

§23 Wir wollen nun im Allgemeinen festlegen

$$\varphi=\pi,$$

und weil gilt

$$\sin(n+1)\pi=-\sin n\pi,\quad \sin(n+2)\pi=+\sin n\pi\quad \text{etc.}$$

wird unsere Gleichung durch $\sin n\pi$ dividiert diese Form annehmen

$$\frac{\pi}{\sin n\pi}\int x^n dx(1-x)^{n-1}=\frac{1}{n^2}+\frac{2n}{1(n+1)^2}+\frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2(n+2)^2}$$
$$+\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3(n+3)^2}+\text{etc.};$$

aber nach Nehmen von

$$\varphi=2\pi$$

wird auf die gleiche Weise sein

$$\frac{2\pi}{\sin 2n\pi}\int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1} = \frac{1}{n^2} - \frac{2n}{1(n+1)^2} + \frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2(n+2)^2}$$
$$-\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3(n+3)^2} + \text{etc.},$$

von welchen Reihen also jene durch diese geteilt einen Quotienten $= \cos n\pi$ liefert, was unpassend erscheint, weil der Quotient größer als die Einheit ist. Aber eine ähnliche Schwierigkeit haben wir schon oben aufgelöst, die aus der Festlegung $\varphi = 2\pi$ entstanden ist; wenn wir nämlich $\varphi = 3\pi$ setzten, träte die erste Reihe selbst ans Licht und hätte die Summe

$$= \frac{3\pi}{\sin 3\pi}\int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1},$$

welche jener nicht gleich ist, wenn n kein verschwindendes Verhältnis ist. Daher ist nur die erste Reihe Geltung zu haben anzusehen; um deren Summe aus ihrer Natur selbst ausfindig zu machen, wollen wir festlegen

$$s = \frac{1}{n^2}t^n + \frac{2n}{(n+1)^2}t^{n+1} + \frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2(n+2)^2}t^{n+2} + \text{etc.}$$

und daher wird sein

$$\frac{\mathrm{d}.t\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t^2} = 1t^{n-1} + \frac{2n}{1}t^n + \frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2}t^{n+1} + \text{etc},$$

die Summe welcher offenbar ist

$$= t^{n-1}(1-t)^{-2n},$$

sodass gilt

$$\frac{t\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \int t^{n-1}\mathrm{d}t(1-t)^{-2n}$$

und

$$s = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \int \frac{t^{n-1}\mathrm{d}t}{(1-t)^{2n}},$$

und so, nachdem nach der Integration $t = 1$ gesetzt worden ist, wird man haben

$$\frac{\pi}{\sin n\pi} \int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \int \frac{t^{n-1}\mathrm{d}t}{(1-t)^{2n}}.$$

Dieser Vergleich der zwei Integralformeln ist umso bemerkenswerter, weil unter den vielen anderen, die bis jetzt gefunden worden sind, keine dieses Geschlechts aufgefunden werden.

Bemerkung 3

§24 Wir wollen im Allgemeinen festlegen

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

und es wird sein

$$\begin{aligned} \sin n\varphi = \sin\frac{n\pi}{2}, \quad \sin(n+1)\varphi = \cos\frac{n\pi}{2}, \\ \sin(n+2)\varphi = -\sin\frac{n\pi}{2}, \quad \sin(n+3)\varphi = -\cos\frac{n\pi}{2} \quad \text{etc.,} \end{aligned}$$

woher diese Gleichung resultiert

$$\frac{\pi}{2}\int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1} = \sin\frac{n\pi}{2}\left(\frac{1}{nn} - \frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2(n+2)^2} + \frac{2n(2n+1)(2n+2)(2n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(n+4)^2} - \text{etc.}\right)$$
$$-\cos\frac{n\pi}{2}\left(\frac{2n}{1(n+1)^2} - \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3(n+3)^2} + \text{etc.}\right).$$

Aber aus der oberen Reduktion ist es offenbar, dass sein wird

$$1 - \frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2}t^2 + \frac{2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}t^4 - \text{etc.}$$
$$= \frac{(1+t\sqrt{-1})^{-2n} + (1-t\sqrt{-1})^{-2n}}{2},$$
$$\frac{2n}{1}t - \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}$$
$$= \frac{(1+t\sqrt{-1})^{-2n} - (1-t\sqrt{-1})^{-2n}}{2\sqrt{-1}}$$

und daher wird erschlossen

$$\frac{\pi}{2}\int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}\int\frac{t^{n-1}\mathrm{d}t}{(1+t\sqrt{-1})^{2n}} + \frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}\int\frac{t^{n-1}\mathrm{d}t}{(1-t\sqrt{-1})^{2n}},$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cos\frac{n\pi}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}\int\frac{t^{n-1}\mathrm{d}t}{(1+t\sqrt{-1})^{2n}} + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\cos\frac{n\pi}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}\int\frac{t^{n-1}\mathrm{d}t}{(1-t\sqrt{-1})^{2n}},$$

wo freilich nach der Integration $t = 1$ gesetzt werden muss. Um aber diesen Ausdruck von den imaginären Größen zu befreien, wollen wir festlegen

$$t = \tan\omega = \frac{\sin\omega}{\cos\omega};$$

es wird sein

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\omega}{\cos^2\omega}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\sin\omega\cos\omega}, \quad t^{n-1}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\omega\sin^{n-1}\omega}{\cos^{n+1}\omega},$$

dann aber

$$\begin{aligned}(1+t\sqrt{-1})^{-2n} &= \cos^{2n}\omega(\cos\omega+\sqrt{-1}\cdot\sin\omega)^{-2n}\\ &= \cos^{2n}\omega(\cos 2n\omega-\sqrt{-1}\cdot\sin 2n\omega),\\ (1-t\sqrt{-1})^{-2n} &= \cos^{2n}\omega(\cos\omega-\sqrt{-1}\cdot\sin\omega)^{-2n}\\ &= \cos^{2n}\omega(\cos 2n\omega+\sqrt{-1}\cdot\sin 2n\omega).\end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Werte werden sich die imaginären Größen gegenseitig aufheben und es wird diese Gleichung hervorgehen

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\int x^n\mathrm{d}x(1-x)^{n-1} = \sin\frac{n\pi}{2}\int\frac{\mathrm{d}\omega}{\sin\omega\cos\omega}\int\mathrm{d}\omega\sin^{n-1}\omega\cos^{n-1}\omega\cos 2n\omega\\ +\cos\frac{n\pi}{2}\int\frac{\mathrm{d}\omega}{\sin\omega\cos\omega}\int\mathrm{d}\omega\sin^{n-1}\omega\cos^{n-1}\omega\sin 2n\omega,\end{aligned}$$

welche zu dieser einfacheren zusammengefasst wird

$$\frac{\pi}{2}\int x^n\mathrm{d}x(1-x)^{n-1} = \int\frac{\mathrm{d}\omega}{\sin\omega\cos\omega}\int\mathrm{d}\omega\sin^{n-1}\omega\cos^{n-1}\omega\sin\left(\frac{n\pi}{2}+2n\omega\right)$$

oder wegen $\sin\omega\cos\omega = \frac{1}{2}\sin 2\omega$ in diese

$$\frac{\pi}{2}\int x^n\mathrm{d}x(1-x)^{n-1} = \frac{1}{2^n}\int\frac{2\mathrm{d}\omega}{\sin 2\omega}\int 2\mathrm{d}\omega\sin^{n-1}2\omega\sin\left(\frac{n\pi}{2}+2n\omega\right).$$

Es sei nun $2\omega = \theta$, damit sie gefälliger wird

$$\frac{\pi}{2} \int x^n \mathrm{d}x (1-x)^{n-1} = \frac{1}{2^n} \int \frac{2\mathrm{d}\theta}{\sin\theta} \int \mathrm{d}\theta \sin^{n-1}\theta \sin n(\frac{\pi}{2} + \theta),$$

wo nach der Integration $\theta = 90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$, dass dann $\omega = 45^{\circ}$ und $t = \tan\omega = 1$ wird.

BEISPIEL III

§25 Wenn die Bogen a, b, c, d etc, eine unterbrochene arithmetischen Progression festlegen, dass ist

$$a = m\varphi, \quad b = n\varphi, \quad c = (1+m]\varphi, \quad d = (1+n)\varphi,$$
$$e = (2+m)\varphi, \quad f = (2+n)\varphi, \quad \text{etc.},$$

aus deren Sinus die Länge des Boges φ zu bestimmen.

Die oben gegebene allgemeine Lösung (§7) gibt diese Gleichung an die Hand

$$
\begin{aligned}
\varphi = {} & \frac{\sin m\varphi}{m} \cdot \frac{nn}{(n-m)(n+m)} \cdot \frac{(1+m)^2}{1(1+2m)} \cdot \frac{(1+n)^2}{(1+n-m)(1+n+m)} \\
& \qquad \cdot \frac{(2+m)^2}{2(2+2m)} \cdot \frac{(2+n)^2}{(2+n-m)(2+n+m)} \cdot \text{etc.} \\
& - \frac{\sin n\varphi}{n} \cdot \frac{mm}{(n-m)(n+m)} \cdot \frac{(1+m)^2}{(1+m-n)(1+m+n)} \cdot \frac{(1+n)^2}{1(1+2n)} \\
& \qquad \cdot \frac{(2+m)^2}{(2+m-n)(2+m+n)} \cdot \frac{(2+n)^2}{2(2+2n)} \cdot \text{etc.} \\
& + \frac{\sin(1+m)\varphi}{1+m} \cdot \frac{mm}{1(1+2m)} \cdot \frac{nn}{(1+m-n)(1+m+n)} \cdot \frac{(1+n)^2}{(n-m)(2+m+n)} \\
& \qquad \cdot \frac{(2+m)^2}{1(3+2m)} \cdot \frac{(2+n)^2}{(1+n-m)(3+n+m)} \cdot \text{etc.} \\
& - \frac{\sin(1+n)\varphi}{1+n} \cdot \frac{mm}{(1+n-m)(1+n+m)} \cdot \frac{nn}{1(1+2n)} \cdot \frac{(1+m)^2}{(n-m)(2+n+m)} \\
& \qquad \cdot \frac{(2+m)^2}{(1+m-n)(3+m+n)} \cdot \frac{(2+n)^2}{1(3+2n)} \cdot \text{etc.} \\
& + \frac{\sin(2+m)\varphi}{2+m} \cdot \frac{mm}{2(2+2m)} \cdot \frac{nn}{(2+m-n)(2+m+n)} \cdot \frac{(1+m)^2}{1(3+2m)} \\
& \qquad \cdot \frac{(1+n)^2}{(1+m-n)(3+m+n)} \cdot \frac{(2+n)^2}{(n-m)(4+m+n)} \cdot \text{etc.} \\
& \qquad\qquad - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Daraus lässt sich aber nichts der Aufmerksamkeit Würdiges schließen; daher möchte ich den besonders bemerkenswerten Fall entwickeln, in welchem gilt

$$n = 1 - m;$$

für diesen setze ich der Kürze wegen

$$\varphi = \frac{\mathfrak{A} \sin m\varphi}{m} - \frac{\mathfrak{B} \sin(1-m)\varphi}{1-m} + \frac{\mathfrak{C} \sin(1+m)\varphi}{1+m} - \frac{\mathfrak{D} \sin(2-m)\varphi}{2-m} + \text{etc.},$$

sodass gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{(1-m)^2}{1(1-2m)} \cdot \frac{(1+m)^2}{1(1+2m)} \cdot \frac{(2-m)^2}{2(2-m)} \cdot \frac{(2+m)^2}{2(2+m)} \cdot \frac{(3-m)^2}{3(2+m)} \cdot \text{etc.},\\
\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} &= \frac{mm}{(1-m)^2} \cdot \frac{1(1+2m)}{2\cdot 2m} \cdot \frac{2(2-2m)}{1(3-2m)} \cdot \frac{2(2+2m)}{3(1+2m)} \cdot \frac{3(3-2m)}{2(3-2m)} \cdot \text{etc.},\\
\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} &= \frac{1(1-2m)}{1(1+2m)} \cdot \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} \cdot \frac{1(3-2m)}{3(1-2m)} \cdot \frac{3(1+2m)}{1(3+2m)} \cdot \frac{2(4-2m)}{4(2-2m)} \cdot \text{etc.},\\
\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}} &= \frac{1(1+2m)}{2(2-2m)} \cdot \frac{2\cdot 2m}{1(3-2m)} \cdot \frac{(1+m)^2}{(2-m)^2} \cdot \frac{1(3+2m)}{4\cdot 2m} \cdot \frac{4(2-2m)}{1(5-2m)} \cdot \text{etc.},\\
\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} &= \frac{2(2-2m)}{2(2+2m)} \cdot \frac{1(3-2m)}{3(1+2m)} \cdot \frac{3(1-2m)}{1(3+2m)} \cdot \frac{(2-m)^2}{(2+m)^2} \cdot \frac{1(5-2m)}{5(1-2m)} \cdot \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

Aber aus der oberen Reduktion wird aufgefunden

$$\mathfrak{A} = \frac{\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x)^{-2m}}{m\int x^m\mathrm{d}x(1-x)^{m-1}\cdot\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x)^{-m}};$$

dann wird aber für die übrigen aus der Form der Produkte selbst erschlossen

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{m}{1-m}, \quad \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} = \frac{1-m}{1+m}, \quad \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}} = \frac{1+m}{2-m}, \quad \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} = \frac{2-m}{2+m} \quad \text{etc.},$$

so dass gilt

$$\mathfrak{B} = \frac{m}{1-m}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C} = \frac{m}{1+m}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{D} = \frac{m}{2-m}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = \frac{m}{2+m}\mathfrak{A}, \quad \text{etc.}$$

Wir wollen also der Kürze wegen festlegen

$$\int x^m \mathrm{d}x(1-x)^{m-1} \cdot \frac{\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x)^{-m}}{\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x)^{-2m}} = M$$

und es wird sein wie folgt

$$M\varphi = \frac{\sin m\varphi}{m^2} - \frac{\sin(1-m)\varphi}{(1-m)^2} + \frac{\sin(1+m)\varphi}{(1+m)^2} - \frac{\sin(2-m)\varphi}{(2-m)^2} + \frac{\sin(2+m)\varphi}{(2+m)^2} - \text{etc.},$$

woher wir durch Differenzieren schließen, dass sein wird

$$M = \frac{\cos m\varphi}{m} - \frac{\cos(1-m)\varphi}{1-m} + \frac{\cos(1+m)\varphi}{1+m} - \frac{\cos(2-m)\varphi}{2-m} + \frac{\cos(2+m)\varphi}{2+m} - \text{etc.},$$

welche Reihe wegen der hervorstechenden Einfachheit besonders bemerkenswert ist, weil wir ja daher durch Setzen von $\varphi = 0$ ableiten

$$M = \frac{1}{m} - \frac{1}{1-m} + \frac{1}{1+m} - \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2+m} - \frac{1}{3-m} + \frac{1}{3+m} - \text{etc.},$$

die Summe welcher Reihe ich schon einst gezeigt habe diese zu sein

$$M = \frac{\pi \cos m\pi}{\sin m\pi},$$

woher wir diesen eleganten Vergleich erschließen

$$\int x^m \mathrm{d}x(1-x)^{m-1} = \frac{\pi \cos m\pi}{\sin m\pi} \cdot \frac{\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x)^{-2m}}{\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x)^{-m}},$$

welche weiter auf diese zurückgeht

$$\int x^m \mathrm{d}x(1-x)^{m-1} = \frac{(1-m)\pi\cos m\pi}{\sin m\pi} \cdot \frac{\int x^m \mathrm{d}x(1-x)^{-2m}}{\int x^m \mathrm{d}x(1-x)^{-m}}$$

oder auf diese noch gefälligere

$$\int x^{m-1} \mathrm{d}x(1-x)^{m-1} = \frac{2\pi\cos m\pi}{\sin m\pi} \cdot \frac{\int x^{m-1} \mathrm{d}x(1-x)^{-2m}}{\int x^{m-1} \mathrm{d}x(1-x)^{-m}}.$$

KOROLLAR 1

§26 Man betrachte also all diese vorzüglichen Lehrsätze, welche die Entwicklung dieses Beispiels uns an die Hand gibt, deren erster ist:

Wenn φ irgendeinen Winkel bezeichnet, wird sein

$$\frac{\pi\cos m\pi}{\sin m\pi} = \frac{\cos m\varphi}{m} - \frac{\cos(1-m)\varphi}{1-m} + \frac{\cos(1+m)\varphi}{1+m} - \frac{\cos(2-m)\varphi}{2-m} + \text{etc.},$$

welche Gleichheit auch so dargeboten werden kann, dass ist

$$\frac{\pi\cos m\pi}{\sin m\pi} = \cos m\varphi\left(\frac{1}{m} - \frac{2m\cos\varphi}{1-mm} - \frac{2m\cos 2\varphi}{4-mm} - \frac{2m\cos 3\varphi}{9-mm} - \text{etc.}\right)$$
$$-2\sin\varphi\left(\frac{\sin\varphi}{1-mm} + \frac{2\sin 2\varphi}{4-mm} + \frac{3\sin 3\varphi}{9-mm} + \frac{4\sin 4\varphi}{16-mm} + \text{etc.}\right),$$

woher, wenn gilt

$$m\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \quad \text{und daher} \quad \varphi = \frac{\pi}{2m},$$

sein wird

$$-\frac{\pi\cos m\pi}{\sin m\pi}=\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{1-mm}+\frac{2\sin\frac{2\pi}{2m}}{4-mm}+\frac{3\sin\frac{3\pi}{2m}}{9-mm}+\frac{4\sin\frac{4\pi}{2m}}{16-mm}+\text{etc.}$$

KOROLLAR 2

§27 Der zweite Lehrsatz wird so ausgesprochen:

Wenn φ irgendeinen Winkel bezeichnet, wird sein

$$\frac{\pi\varphi\cos m\pi}{\sin m\pi}=\frac{\sin m\varphi}{mm}-\frac{\sin(1-m)\varphi}{(1-m)^2}+\frac{\sin(1+m)\varphi}{(1+m)^2}-\frac{\sin(2-m)\varphi}{(2-m)^2}+\text{etc.}$$

Daher wird nach Nehmen von $\varphi=\pi$ sein

$$\frac{\pi\pi\cos m\pi}{\sin m\pi}=\frac{\sin m\pi}{mm}-\frac{\sin m\pi}{(1-m)^2}-\frac{\sin m\pi}{(1+m)^2}+\frac{\sin m\pi}{(2-m)^2}+\frac{\sin m\pi}{(2+m)^2}-\text{etc.}$$

oder

$$\frac{\pi\pi}{\sin m\pi\tan m\pi}=\frac{1}{m^2}-\frac{1}{(1-m)^2}-\frac{1}{(1+m)^2}+\frac{1}{(2-m)^2}+\frac{1}{(2+m)^2}-\text{etc.}$$

Aber nach Setzen von

$$m\varphi=\pi$$

wird man haben

$$\frac{\pi\pi\cos m\pi}{m\sin m\pi} = \frac{\sin\frac{\pi}{m}}{(1-m)^2} - \frac{\sin\frac{\pi}{m}}{(1+m)^2} - \frac{\sin\frac{2\pi}{m}}{(2-m)^2} - \frac{\sin\frac{2\pi}{m}}{(2+m)^2} + \text{etc.}$$

oder auf diese Weise

$$\frac{\pi\pi\cos m\pi}{4mm\sin m\pi} = \frac{1\sin\frac{\pi}{m}}{(1-mm)^2} + \frac{2\sin\frac{2\pi}{m}}{(4-mm)^2} + \frac{3\sin\frac{3\pi}{m}}{(9-mm)^2} + \text{etc.}$$

KOROLLAR 3

§28 Der dritte Lehrsatz betrifft einen Vergleich von Integralformlen und wird so ausgesprochen:

Wenn die Integration der folgenden Formeln von der Grenze $x = 0$ bis hin zur Grenze $x = 1$ erstreckt wird, wird immer gelten

$$\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x)^{m-1} \cdot \int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x)^{-m} = \frac{2\pi\cos m\pi}{\sin m\pi}\int x^{m-1}\mathrm{d}x(1-x)^{-2m},$$

oder wenn $m = \frac{\lambda}{n}$ und $x = y^n$ gesetzt wird, wird sein

$$\int \frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-\lambda}}} \cdot \int \frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{\lambda}}} = \frac{2\pi\cos\frac{\lambda\pi}{n}}{n\sin\frac{\lambda\pi}{n}} \cdot \int \frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{2\lambda}}}$$

BEMERKUNG

§29 Der Beweis dieses letzten Lehrsatzes scheint nicht gerade leicht; dennoch kann indes durch die Dinge, die ich einst über Integralformeln dieser Art mitgeteilt habe, seine Gültigkeit auf die folgende Weise gezeigt werden. Wir wollen nämlich, wie ich es dort gemacht habe, diese Integralformel

$$\int \frac{y^{p-1}}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-q}}}$$

mit diesem Charakter $\left(\frac{p}{q}\right)$ bezeichnen und es ist zu beweisen, dass gilt

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{n-\lambda}\right) = \frac{2\pi\cos\frac{\lambda\pi}{n}}{n\sin\frac{\lambda\pi}{n}}\left(\frac{\lambda}{n-2\lambda}\right).$$

Nun habe ich zuerst bewiesen, wenn galt

$$q + r = n,$$

dass sein wird

$$\left(\frac{q}{r}\right) = \frac{\pi}{n\sin\frac{q\pi}{n}},$$

woher sofort folgt

$$\left(\frac{\lambda}{n-\lambda}\right) = \int \frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{\lambda}}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\lambda\pi}{n}},$$

sodass es zu beweisen übrig bleibt, dass ist

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right) = 2\cos\frac{\lambda\pi}{n}\left(\frac{\lambda}{n-2\lambda}\right).$$

Aber ebendort haben wir gezeigt, wenn galt

$$p+q+r=n,$$

dass sein wird

$$\frac{1}{\sin\frac{r\pi}{n}}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{\sin\frac{q\pi}{n}}\left(\frac{p}{r}\right)=\frac{1}{\sin\frac{p\pi}{n}}\left(\frac{q}{r}\right).$$

Wir wollen also nehmen

$$p=\lambda,\quad q=\lambda$$

und es wird sein

$$r=n-2\lambda,$$

womit wir wegen

$$\sin\frac{(n-2\lambda)\pi}{n}=\sin\frac{2\lambda\pi}{n}$$

erschließen

$$\frac{1}{\sin\frac{2\lambda\pi}{n}}\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)=\frac{1}{\sin\frac{\lambda\pi}{n}}\left(\frac{\lambda}{n-2\lambda}\right),$$

sodass wegen

$$\sin\frac{2\lambda\pi}{n}=2\sin\frac{\lambda\pi}{n}\cos\frac{\lambda\pi}{n}$$

in der Tat ist

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right) = 2\cos\frac{\lambda\pi}{n}\left(\frac{\lambda}{n-2\lambda}\right).$$

Um Vieles mysteriöser ist aber der oben (§23) gefundene Lehrsatz, dass unter denselben Integrationsgrenzen gilt

$$\frac{\pi}{\sin n\pi}\int x^n \mathrm{d}x(1-x)^{n-1} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}\int\frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{(1-x)^{2n}}$$

oder

$$\frac{\pi}{2\sin n\pi}\int x^{n-1}\mathrm{d}x(1-x)^{n-1} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}\int\frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{(1-x)^{2n}};$$

damit diese Gleichung auf jene Form zurückgeführt, wollen wir anstelle von n $\frac{\lambda}{n}$ setzen und es sei $x = y^n$, woher wird

$$\frac{\pi}{2n\sin\frac{\lambda\pi}{n}}\int\frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-\lambda}}} = \int\frac{\mathrm{d}y}{y}\int\frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{2\lambda}}}.$$

Gerade haben wir aber gesehen, dass ist

$$\int\frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{n-\lambda}}} = 2\cos\frac{\lambda\pi}{n}\int\frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{2\lambda}}}$$

und so erschließen wir vermöge dieses Lehrsatzes, dass gilt

$$\frac{\pi}{n\tan\frac{\lambda\pi}{n}}\int\frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{2\lambda}}} = \int\frac{\mathrm{d}y}{y}\int\frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{2\lambda}}},$$

und daher weiter diesen nicht weniger bemerkenswerte Lehrsatz

$$\frac{\pi}{n\tan\frac{\lambda\pi}{n}}\int\frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{2\lambda}}}=-\int\frac{y^{\lambda-1}\mathrm{d}y\cdot\log y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^{2\lambda}}},$$

woher wir nach Nehmen von $\lambda=1$ die folgende Proportion haben

$$\frac{\pi}{n}:\tan\frac{\pi}{n}=\int\frac{\mathrm{d}y\log\frac{1}{y}}{\sqrt[n]{(1-y^n)^2}}:\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt[n]{(1-y^n)^2}}.$$

PROBLEM 3

§30 Eine Gleichung solcher Art für eine gekrümmte Linie zwischen zwei Variablen, der Abszisse x und der Ordinate y, zu finden, dass den in einer arithmetischen Progression genommenen Abszissen gegebene Ordinaten zukommen, natürlich:

Wenn ist

$$x=n\theta,\quad (n+1)\theta\quad (n+2)\theta\quad (n+3)\theta,\quad (n+1)\theta,\quad (n+1)\theta\quad \text{etc.}$$

dass wird

$$y=p,\qquad q,\qquad r,\qquad s,\qquad t\qquad \text{etc.}$$

Lösung

Wir wollen im Allgemeinen festlegen

$$x = \theta\omega$$

und aus der in §10 gegebenen allgemeinen Lösung erlangen wir diese Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{y}{\omega} = \ & \frac{p}{n} \cdot \frac{(n+1-\omega)(n+1+\omega)}{1(2n+1)} \cdot \frac{(n+2-\omega)(n+2+\omega)}{2(2n+2)} \cdot \frac{(n+3-\omega)(n+3+\omega)}{3(2n+3)} \cdot \text{etc.} \\
& - \frac{p}{n+1} \cdot \frac{(n-\omega)(n+\omega)}{1(2n+1)} \cdot \frac{(n+2-\omega)(n+2+\omega)}{1(2n+3)} \cdot \frac{(n+3-\omega)(n+3+\omega)}{2(2n+4)} \cdot \text{etc.} \\
& + \frac{r}{n+2} \cdot \frac{(n-\omega)(n+\omega)}{2(2n+2)} \cdot \frac{(n+1-\omega)(n+1+\omega)}{1(2n+3)} \cdot \frac{(n+3-\omega)(n+3+\omega)}{1(2n+5)} \cdot \text{etc.} \\
& - \text{etc.},
\end{aligned}$$

welche wir der Kürze wegen so darstellen wollen

$$\frac{y}{\omega} = \mathfrak{A} \cdot \frac{p}{n} - \mathfrak{B} \cdot \frac{q}{n+1} + \mathfrak{C} \cdot \frac{r}{n+2} - \mathfrak{D} \cdot \frac{s}{n+3} + \text{etc.};$$

und zuerst werden wir freilich für den zu wählenden Wert von $\mathfrak{A}$ aus der in §17 erwähnten allgemeinen Form für diesen Fall haben

$$a = n+1-\omega, \quad b = 1, \quad c = n-\omega \quad \text{und} \quad d = 1,$$

woher wir durch die von der Grenzen $z = 0$ bis zu $z = 1$ zu erstreckenden Integralformeln erschließen

$$\mathfrak{A} = \frac{\int dz(1-z)^{n-\omega-1}}{\int z^{n-\omega}dz(1-z)^{n-\omega-1}} = \frac{1}{(n-\omega)\int z^{n-\omega}dz(1-z)^{n-\omega-1}}$$

oder

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{(n-\omega)\int z^{n-\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{n-\omega-1}},$$

nach Einräumen welcher Integration die übrigen leicht erledigt werden. Es wird nämlich wie oben §17 sein

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} &= \frac{(n-\omega)(n+\omega)}{(n+1-\omega)(n+1+\omega)}\cdot(2+2n) = \frac{2(n+1)(n-\omega)(n+\omega)}{n+1-\omega)(n+1+\omega)},\\
\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} &= \frac{(n+1-\omega)(n+1+\omega)}{(n+2-\omega)(n+2+\omega)}\cdot\frac{(1+2n)(2+n)}{2(n+1)},\\
\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}} &= \frac{(n+2-\omega)(n+3+\omega)}{(n+3-\omega)(n+3+\omega)}\cdot\frac{(2+2n)(3+n)}{3(n+2)},\\
\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} &= \frac{(n+3-\omega)(n+3+\omega)}{(n+4-\omega)(n+4+\omega)}\cdot\frac{(3+2n)(4+n)}{4(n+3)}
\end{aligned}$$

etc.

Wir wollen also die Integralformel wie folgt festlegen

$$\int z^{n-\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{n-\omega-1} = \triangle,$$

dass gilt,

$$\mathfrak{A} = \frac{2}{(n-\omega)\triangle},$$

und die übrigen Koeffizienten werden so durch $\mathfrak{A}$ definiert werden:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= \frac{2(n+1)}{1} \cdot \frac{nn-\omega\omega}{(n+1)^2-\omega\omega}\mathfrak{A},\\
\mathfrak{C} &= \frac{2(n+2)(2n+1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{nn-\omega\omega}{(n+2)^2-\omega\omega}\mathfrak{A},\\
\mathfrak{D} &= \frac{2(n+3)(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{nn-\omega\omega}{(n+3)^2-\omega\omega}\mathfrak{A},\\
\mathfrak{E} &= \frac{2(n+4)(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot \frac{nn-\omega\omega}{(n+4)^2-\omega\omega}\mathfrak{A}
\end{aligned}
$$

etc.

Deswegen wird die gesuchte Gleichung zwischen y und $x = \theta\omega$ so beschaffen sein:

$$
\frac{n \triangle y}{2(n+\omega)\omega} = \frac{p}{nn-\omega\omega} - \frac{2n}{1} \cdot \frac{q}{(n+1)^2-\omega\omega}
$$
$$
+\frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2} \cdot \frac{r}{(n+2)^2-\omega\omega} - \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{s}{(n+3)^2-\omega\omega} + \text{etc.},
$$

woher für jeden Wert von $x = \theta\omega$ der zukommende Wert von y definiert wird und das durch die Ordinaten p, q, r etc., welchen den Abszissen $n\theta$, $(n+1)\theta$, $(n+2)\theta$ etc. zukommend angenommen werden. Dort muss es freilich angemerkt werden, wenn ω einem gewissen Term der Progression n, $n+1$, $n+2$ etc. gleich genommen wird, dass dann der Nenner der entsprechenden gegebenen Ordinate verschwindet, so dass in Bezug auf den Term, natürlich unbestimmten, die übrigen verschwinden. Aber dann geht zugleich auch der Wert $\triangle$ als unendlich hervor und von genau solcher Art, dass dann entweder $y = p$ oder $y = q$ oder $y = r$ etc. wird, so wie es die Natur der Sache erfordert.

Korollar 1

§31 Wenn die vorgelegten Abszissen Kreisbogen bezeichnen, die Ordinaten hingegen die Sinus derselben, dass gilt

$$p = \sin n\theta, \quad q = \sin(n+1)\theta, \quad q = \sin(n+1)\theta, \quad r = \sin(n+2)\theta, \quad \text{etc.},$$

wird sein

$$y = \sin \omega\theta,$$

woher diese allgemeine Gleichung resultiert

$$\frac{n \triangle \sin \omega\theta}{2(n+\omega)\omega} = \frac{\sin n\theta}{nn - \omega\omega} - \frac{2n}{1} \cdot \frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)^2 - \omega^2} + \frac{2n(2n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\sin(n+2)\theta}{(n+2)^2 - \omega^2}$$
$$- \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\sin(n+3)\theta}{(n+3)^2 - \omega^2} + \text{etc.},$$

wo es besonders bemerkenswert ist, dass die drei Buchstaben n, θ und ω nach Belieben angenommen werden können.

KOROLLAR 2

§32 Wenn wir also nehmen

$$\theta = \pi,$$

dass all Sinus der Reihe auf denselben $\sin n\theta$ zurückgeführt werden, wird sein

$$\frac{n \triangle \sin \omega\theta}{2(n+\omega)\omega \sin n\pi} = \frac{1}{nn - \omega\omega} + \frac{2n}{1} \cdot \frac{1}{(n+1)^2 - \omega^2} + \frac{2n(2n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2 - \omega^2}$$
$$+ \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(n+3)^2 - \omega^2} + \text{etc.}$$

Daher, wenn ist

$$n = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \triangle = \int z^{-\omega-\frac{1}{2}} \mathrm{d}z (1-z)^{-\omega-\frac{1}{2}}$$

oder

$$\triangle = 2 \int \frac{z^{\frac{1}{2}-\omega} \mathrm{d}z}{(1-z)^{\frac{1}{2}+\omega}},$$

wird man haben

$$\frac{\triangle \sin \omega\pi}{8(1+2\omega)\omega} = \frac{1}{1-4\omega^2} + \frac{1}{9-4\omega^2} + \frac{1}{25-4\omega^2} + \frac{1}{49-4\omega^2} + \text{etc.},$$

die Summe welcher Reihe ich gezeigt habe zu sein

$$= \frac{\pi}{8\omega} \tan \omega\pi,$$

sodass gilt

$$\frac{\triangle \sin \omega\pi}{8(1+2\omega)\omega} = \frac{\pi}{8\omega} \tan \omega\pi$$

und daher

$$\triangle = \frac{(1+2\omega)\pi}{\cos \omega\pi}.$$

BEMERKUNG 1

§33 Diesen Schlussfolgerungen lässt sich aber wegen des schon oben erwähnten Grundes nicht allzu sehr trauen. Denn nach Festlegen der Ordinaten wie folgt

$$p = \sin n\theta, \quad q = \sin(n+1)\theta, \quad r = \sin(n+2)\theta \quad \text{etc.},$$

während die Bogen $n\theta$, $(n+1)\theta$, $(n+2)\theta$ etc. wie die Abszissen angesehen werden, liefert die gefundene Gleichung eine gekrümmte Linie solcher Art, die durch all diese Punkte hindurchgeht; aber in der Tat folgt daher nicht, dass diese Kurve selbst eine Sinuslinie ist, weil unendlich viele andere durch jene selben gegebenen unendlich vielen Punkte hindurchgehende gekrümmte Linie gegeben sind. Daher gibt, nachdem der Buchstabe y für das Bezeichnen der der Abszisse $x = \theta\omega$ entsprechenden Ordinate beibehalten wurde, unsere Lösung für die gesuchte Kurve freilich diese Gleichung an die Hand

$$\frac{n \triangle y}{2(n+\omega)} = \frac{\sin n\theta}{n^2-\omega^2} - \frac{2n}{1} \cdot \frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)^2-\omega^2} + \frac{2n(2n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\sin(n+2)\theta}{(n+2)^2-\omega^2}$$
$$- \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\sin(n+3)\theta}{(n+3)^2-\omega^2} + \text{etc.},$$

sodass der Abszisse

$$x = (n \pm i)\theta$$

diese Ordinate entspricht

$$y = \sin(n \pm i)\theta,$$

wenn i nur irgendeine ganze Zahl ist. Es könnte also geschehen, dass für andere Abszissen, wo i keine ganze Zahl und daher allgemein, wenn $x = \omega\theta$

ist, die Ordinate nicht $y = \sin \omega\theta$ war. Damit dies deutlicher erkannt wird, wollen wir die allgemeine Gleichung für gänzlich alle durch die gegebenen Punkte hindurchgehenden Linien ausfindig machen, und es sei bisher dieser Wert gefunden worden

$$y = \Theta$$

und es werde eine für alle gegebenen Abszissen verschwindende Funktion gesucht, von welcher Art diese ist

$$\omega(nn - \omega\omega)\frac{((n+1)^2 - \omega^2)}{1(2n+1)}\frac{((n+2)^2 - \omega^2)}{2(2n+2)}\frac{((n+3)^2 - \omega^2)}{3(2n+3)} \text{ etc.,}$$

welche durch die oben gesagten Dinge ist

$$= \omega(nn - \omega\omega)\mathfrak{A} = \frac{2\omega(n+\omega)}{\triangle}.$$

Diese Größe werde $= \Omega$ genannt und es sei $f : \Omega$ eine Funktion von Ω solcher Art, die verschwindet, wenn $\Omega = 0$ ist, und es wird die allgemeine für alle Kurven Genüge leistende Gleichung sein

$$y = \Theta + f : \Omega = \Omega + f : \frac{2\omega(n+\omega)}{\triangle}.$$

Und nun ist es ohne jeden Zweifel gewiss, dass in dieser Gleichung die Gleichung $y = \sin \omega\theta$, nachdem $x = \omega\theta$ gesetzt worden ist, enthalten ist, weil ja diese Gleichung den vorgeschriebenen Bedingungen Genüge leistet. Daher könnte es vollkommen passieren, dass die Gleichung $y = \Theta$ von dieser $y = \sin \omega\theta$ verschieden war; das kann besonders von den den Buchstaben θ und n zugeteilten Werten abhängen, sodass in den einen Fällen die gefundene Gleichung $y = \Theta$ mit dieser $y = \sin \omega\theta$ übereinstimmt, in anderen hingegen von derselben abweicht.

BEMERKUNG 2

§34 Wir wollen diese Dinge auf den Fall anwenden, in welchem gilt

$$\theta = \pi \quad \text{etc.} \quad n = \frac{1}{2}$$

sowie

$$\triangle = 2\int \frac{z^{\frac{1}{2}-\omega}\mathrm{d}z}{(1-z)^{\frac{1}{2}+\omega}};$$

und weil ja die Summe der gefundenen Reihe ist

$$= \frac{\pi}{8\omega}\tan\omega\pi$$

wird man diese allgemeine Gleichung haben

$$\frac{\triangle y}{8(1+2\omega)\omega} = \frac{\pi}{8\omega}\tan\omega\pi + \frac{\triangle}{8(1+2\omega)}f : \frac{\omega(1+2\omega)}{2\triangle}$$

oder

$$y = \frac{\pi(1+2\omega)}{\triangle}\tan\omega\pi + f : \frac{\omega(1+2\omega)}{2\triangle},$$

wo die hinzugefügte im Allgemeinen so beschaffen ist, dass sie in den Fällen

$$\omega = 0, \quad \omega = \pm\frac{1}{2}, \quad \omega = \pm\frac{3}{2}, \quad \omega = \pm\frac{5}{2} \quad \text{etc.}$$

verschwindet, von welcher Art diese Formeln sind

$$\sin 2\omega\pi, \quad \omega\cos\omega\pi, \quad \text{ebenso} \quad \sin 2i\omega\pi \quad \text{und} \quad \omega\cos(2i-1)\omega\pi,$$

während i irgendeine ganze Zahl bezeichnet; daher ist es möglich wie viele Formeln von dieser Art auch immer nach Belieben zu kombinieren. Es wird also eine gewisse Funktion von dieser Art gegeben sein, die φ sei, sodass wird

$$y = \sin\omega\pi$$

und daher

$$\sin\omega\pi = \frac{\pi(1+2\omega)}{\triangle}\tan\omega\pi + \varphi$$

oder

$$\triangle = \frac{\pi(1+2\omega)\tan\omega\pi}{\sin\omega\pi - \varphi} = 2\int \frac{z^{\frac{1}{2}-\omega}dz}{(1-z)^{\frac{1}{2}+\omega}}.$$

Weil also im Fall $\omega = 0$ die Funktion φ gewiss verschwindet, wird natürlich $\triangle = \pi$ sein, was ein Anzeichen ist, dass die Funktion φ den Faktor ω^λ enthält, dessen Exponent λ größer als die Einheit ist, weil andernfalls nach Nehmen von $\omega = 0$ die Größe φ in Bezug auf $\sin\omega\pi$ verschwände. Und dieses Grundes wegen sind die Schlussfolgerungen des vorhergehenden zweiten Problems für wahr zu halten.

Problem 4

§35 Eine Gleichung solcher Art für eine gekrümmte Linie zwischen der Abszisse x und der Ordinate y zu finden, dass den in einer unterbrochenen arithmetischen Progression angenommenen Abszissen gegebene Ordinaten entsprechen, natürlich:

$$x = n\theta, \quad (1-n)\theta, \quad (1+n)\theta, \quad (2-n)\theta, \quad (2+n)\theta, \quad (3-n)\theta \quad \text{etc.},$$

dass wird

$$y = p, \qquad q, \qquad r, \qquad s, \qquad t, \qquad u \qquad \text{etc.}$$

LÖSUNG

Wir wollen im Allgemeinen die Abszissen wie folgt festlegen

$$x = \theta\omega$$

und für die Gleichung zwischen x und y wollen wir diese Gleichung festsetzen

$$\frac{y}{\omega} = \mathfrak{A}\cdot\frac{p}{n} - \mathfrak{B}\cdot\frac{q}{1-n} + \mathfrak{C}\cdot\frac{r}{1+n} - \mathfrak{D}\cdot\frac{s}{2-n} + \mathfrak{E}\cdot\frac{t}{2+n} - \mathfrak{F}\cdot\frac{u}{3-n} + \text{etc.}$$

und aus dem auf diesen allgemeinen Fall erstreckten Paragraphen 25 wird man haben

$$\mathfrak{A} = \frac{(1-n-\omega)(1-n+\omega)}{1(1-2n)}\cdot\frac{(1+n-\omega)(1+n+\omega)}{1(1+2n)}\cdot\frac{(2-n-\omega)(2-n+\omega)}{2(2-2n)}\cdot\frac{(2+n-\omega)(2+n+\omega)}{2(2+2n)}\cdot\text{etc.}$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{(n-\omega)(n+\omega)}{(1-n-\omega)(1-n+\omega)}\cdot\frac{1-n}{n}, \quad \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} = \frac{(1-n-\omega)(1-n+\omega)}{(1+n-\omega)(1+n+\omega)}\cdot\frac{1+n}{1-n},$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}} = \frac{(1+n-\omega)(1+n+\omega)}{(2-n-\omega)(2-n+\omega)}\cdot\frac{2-n}{1+n}, \quad \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} = \frac{(2-n-\omega)(2-n+\omega)}{(2+n-\omega)(2+n+\omega)}\cdot\frac{2+n}{2-n}$$

etc.

Wir wollen den Wert von $\mathfrak{A}$ in zwei Produkte entwickeln

$$\mathfrak{P} = \frac{(1-n-\omega)(1-n+\omega)}{1(1-2n)} \cdot \frac{(2-n-\omega)(2-n+\omega)}{2(2-2n)} \cdot \frac{(3-n-\omega)(3-n+\omega)}{3(3-2n)} \cdot \text{etc.},$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{(1+n-\omega)(1+n+\omega)}{1(1+2n)} \cdot \frac{(2+n-\omega)(2+n+\omega)}{2(2+2n)} \cdot \frac{(3+n-\omega)(3+n+\omega)}{3(3+2n)} \cdot \text{etc.},$$

sodass ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q},$$

und wir wollen den Wert jeder der beiden gemäß Paragraph 17 durch Integralformeln definieren. Und zwar wollen wir zuerst für das unendliche Produkt $\mathfrak{P}$ setzen

$$a = 1-n-\omega, \quad b = 1, \quad c = -n+\omega \quad \text{etc.} \quad d = 1$$

und es wird sein

$$\mathfrak{P} = \frac{\int dx(1-x)^{-1-n+\omega}}{\int x^{-n-\omega}dx(1-x)^{-1-n+\omega}} = \frac{1}{\omega-n} \cdot \frac{1}{\int x^{-n-\omega}dx(1-x)^{-1-n+\omega}},$$

wenn freilich gilt

$$\omega - n > 0.$$

Für das andere unendliche Produkt, indem nur n negativ genommen wird, wird werden

$$\mathfrak{Q} == \frac{1}{\omega+n} \cdot \frac{1}{\int x^{n-\omega} dx (1-x)^{n+\omega-1}}.$$

Aber damit die Bedingung $\omega - n > 0$ nicht von Nöten ist, wollen wir eine andere Aufteilung gebrauchen und es sei

$$\mathfrak{P} = \frac{(1+n+\omega)(1-n-\omega)}{1\cdot 1} \cdot \frac{(2+n+\omega)(2-n-\omega)}{2\cdot 2} \cdot \frac{(3+n+\omega)(3-n-\omega)}{3\cdot 3} \cdot \text{etc.},$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{(1+n-\omega)(1-n+\omega)}{(1-2n)(1+2n)} \cdot \frac{(2+n-\omega)(2-n+\omega)}{(2-2n)(2+2n)} \cdot \frac{(3+n-\omega)(3-n+\omega)}{(3-2n)(3+2n)} \cdot \text{etc.},$$

und für $\mathfrak{P}$ wollen wir festlegen

$$a = 1-n-\omega, \quad b = 1, \quad c = n+\omega, \quad d = 1,$$

für $\mathfrak{Q}$ hingegen

$$a = 1+n-\omega, \quad b = 1-2n, \quad c = n+\omega, \quad \text{und} \quad d = 1$$

und es wird sein

$$\mathfrak{P} = \frac{\int dx (1-x)^{-1+n+\omega}}{\int x^{-n-\omega} dx (1-x)^{-1+n+\omega}} = \frac{1}{n+\omega} \cdot \frac{1}{\int x^{-n-\omega} dx (1-x)^{-1+n+\omega}},$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{\int x^{-2n} dx (1-x)^{-1+n+\omega}}{\int x^{n-\omega} dx (1-x)^{-1+n+\omega}}.$$

Es ist aber im Allgemeinen

$$\int x^m dx (1-x)^{k-1} = \frac{m+k+1}{k} \int x^m dx (1-x)^k,$$

also

$$\int x^{-n-\omega}\mathrm{d}x(1-x)^{-1+n+\omega} = \frac{1}{n+\omega}\int x^{-n-\omega}\mathrm{d}x(1-x)^{n+\omega}$$
$$= \frac{1}{n+\omega}\int y^{n+\omega}\mathrm{d}y(1-y)^{-n-\omega},$$
$$\int x^{-2n}\mathrm{d}x(1-x)^{-1+n+\omega} = \frac{1-n+\omega}{n+\omega}\int x^{-2n}\mathrm{d}x(1-x)^{n+\omega}$$
$$\frac{1-n+\omega}{n+\omega}\int y^{n+\omega}\mathrm{d}y(1-y)^{-2n},$$
$$\int x^{n-\omega}\mathrm{d}x(1-x)^{-1+n+\omega} = \frac{1+2n}{n+\omega}\int x^{n-\omega}\mathrm{d}x(1-x)^{n+\omega}$$
$$= \frac{1+2n}{n+\omega}\int y^{n+\omega}\mathrm{d}y(1-y)^{n-\omega},$$

woher geschlossen wird

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \frac{(1-n-\omega)\int y^{n+\omega}\mathrm{d}y(1-y)^{-2n}}{\int y^{n+\omega}\mathrm{d}y(1-y)^{-n+\omega}\cdot\int y^{n+\omega}\mathrm{d}y(1-y)^{n-\omega}}$$

oder

$$\mathfrak{A} = \frac{\int y^{n+\omega-1}\mathrm{d}y(1-y)^{-2n}}{\int y^{n+\omega}\mathrm{d}y(1-y)^{-n-\omega}\cdot\int y^{n+\omega-1}\mathrm{d}y(1-y)^{n-\omega}}$$

oder

$$\mathfrak{A} = \frac{\int y^{n+\omega-1}\mathrm{d}y(1-y)^{-2n}}{(n+\omega)\int y^{n+\omega-1}\mathrm{d}y(1-y)^{-n-\omega}\cdot\int y^{n+\omega-1}\mathrm{d}y(1-y)^{n-\omega}}.$$

Weil also ist

$$\mathfrak{B} = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{nn-\omega\omega}{(1-n)^2-\omega\omega}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C} = \frac{1+n}{n} \cdot \frac{nn-\omega\omega}{(1+n)^2-\omega\omega}\mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{D} = \frac{2-n}{n} \cdot \frac{nn-\omega\omega}{(2-n)^2-\omega\omega}\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{E} = \frac{2+n}{n} \cdot \frac{nn-\omega\omega}{(2+n)^2-\omega\omega}\mathfrak{A}$$
$$\text{etc.},$$

wird durch ein hinreichend gefällige Reihe sein

$$\frac{y}{\mathfrak{A}\omega} = \frac{p}{n} - \frac{(nn-\omega\omega)q}{n((1-n)^2-\omega^2)} + \frac{(nn-\omega\omega)r}{n((1+n)^2-\omega^2)} - \frac{(nn-\omega\omega)s}{n((2-n)^2-\omega^2)} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{ny}{\mathfrak{A}\omega(nn-\omega\omega} = \frac{p}{n^2-\omega^2} - \frac{q}{(1-n)^2-\omega^2} + \frac{r}{(1+n)^2-\omega^2} - \text{etc.}$$

Indem aber anstelle von $\mathfrak{A}$ wieder die Integralform eingesetzt wird, wo ich freilich die neue Variable der Unterscheidung wegen mit dem Buchstaben z bezeichnen werde, wird diese selbe Reihe ist aber diesem Ausdruck gleich

$$\frac{ny}{(n-\omega)\omega} \cdot \frac{\int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{-n-\omega} \cdot \int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{n-\omega}}{\int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{-2n}},$$

die Integration welcher Formeln von der Grenze $z = 0$ bis zu $z = 1$ erstreckt zu verstehen sind.

KOROLLAR 1

§36 Wenn wir also der Kürze wegen diese Integralform wie folgt festlegen

$$\frac{\int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{-n-\omega} \cdot \int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{n-\omega}}{\int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{-2n}} = \triangle$$

und die einzelnen Terme der Reihe in zwei auflösen, werden wir haben

$$\frac{2n \triangle y}{n-\omega} = + \frac{p}{n-\omega} - \frac{q}{1-n-\omega} + \frac{r}{1+n-\omega} - \frac{s}{2-n-\omega} + \frac{t}{2+n-\omega} - \text{etc.}$$
$$- \frac{p}{n+\omega} + \frac{q}{1-n+\omega} - \frac{r}{1+n+\omega} + \frac{s}{2-n+\omega} - \frac{t}{2+n+\omega} + \text{etc.}$$

KOROLLAR 2

§37 Die Gleichung definiert also eine gekrümmte Linie solcher Art, in welcher den Abszissen

$$x = 0, \quad n\theta, \quad (1-n)\theta, \quad (1+n)\theta, \quad (2-n)\theta, \quad (2+n)\theta \quad \text{etc.}$$

diese Ordinaten entsprechen

$$y = 0, \qquad p, \qquad q, \qquad r, \qquad s, \qquad t \qquad \text{etc.},$$

denselben Abszissen negativ genommen aber dieselben Ordinate negativ genommen entsprechen. Im Allgemeinen ist aber hier die Ordinate $x = \theta\omega$ gesetzt worden.

KOROLLAR 3

§38 Weil ja hier der Buchstabe θ aus der Rechnung herausgegangen ist, wäre es möglich gewesen, an seiner Stelle die Einheit zu schreiben, dass der Buchstabe ω die Abszisse selbst bezeichnen würde. Aber wenn wir eine Anwendung auf Bogen und deren Sinus machen wollen, ist es von Vorteil, den Buchstaben θ in der Rechnung beizubehalten.

BEMERKUNG

§39 Der Nutzen dieses Problems wird besonders erkannt, wenn wie oben die Abszissen als Kreisbogen angesehen werden und die gegebenen Abszissen so angenommen werden, dass die Ordinate p, q, r, s, t etc. einander gleich werden, ob positiv oder negativ. Damit also in diesen Fällen klar wird, ob die gefundene Reihe anderswoher summiert werden kann, nehme man die Dinge zur Hilfe, die ich einst über ähnliche Reihen mitgeteilt habe, woher freilich die Summen der zwei folgenden Reihen erschlossen werden

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta-\alpha} + \frac{1}{\beta+\alpha} - \frac{1}{2\beta-\alpha} + \frac{1}{2\beta+\alpha} - \text{etc.} = \frac{\pi}{\beta\tan\frac{\alpha\pi}{\beta}},\\
&\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta-\alpha} - \frac{1}{\beta+\alpha} - \frac{1}{2\beta-\alpha} + \frac{1}{2\beta+\alpha} + \text{etc.} = \frac{\pi}{\beta\sin\frac{\alpha\pi}{\beta}}.
\end{aligned}$$

Daher leiten wir also für unser Problem die vier folgenden Summationen ab

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \frac{1}{n-\omega} - \frac{1}{1-n+\omega} + \frac{1}{1+n-\omega} - \frac{1}{2-n+\omega} + \frac{1}{2+n-\omega} - \text{etc.} = \frac{\pi}{\tan(n-\omega)\pi},\\
&\text{II.} && \frac{1}{n-\omega} + \frac{1}{1-n+\omega} - \frac{1}{1+n-\omega} - \frac{1}{2-n+\omega} + \frac{1}{2+n-\omega} + \text{etc.} = \frac{\pi}{\sin(n-\omega)\pi},\\
&\text{III.} && \frac{1}{n+\omega} - \frac{1}{1-n-\omega} + \frac{1}{1+n+\omega} - \frac{1}{2-n-\omega} + \frac{1}{2+n+\omega} - \text{etc.} = \frac{\pi}{\tan(n+\omega)\pi},\\
&\text{IV.} && \frac{1}{n+\omega} + \frac{1}{1-n-\omega} - \frac{1}{1+n+\omega} - \frac{1}{2-n-\omega} + \frac{1}{2+n+\omega} + \text{etc.} = \frac{\pi}{\sin(n+\omega)\pi}.
\end{aligned}$$

Nachdem diese bemerkt worden sind, wollen wir die Fälle entwickeln, welche sich mit Hilfe dieser Summationen auf endliche Ausdrücke zurückführen lassen.

Beispiel 1

§40 Es seien die Ordinaten, welche den Abszissen

$$x = 0, \quad n\theta, \quad (1-n)\theta, \quad (1+n)\theta, \quad (2-n)\theta, \quad (2+n)\theta \quad \text{etc.}$$

entsprechen,

$$p = f, \quad q = f, \quad r = -f, \quad s = -f, \quad t = +f, \quad u = +f \quad \text{etc.}$$

und durch eine endliche Gleichung werde eine Relation zwischen der Ordinate y und der Abszisse $x = \theta\omega$ ausfindig gemacht.

Lösung

Das erste Korollar liefert für diesen Fall diese Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{2n \triangle y}{f(n-\omega)} = &+\frac{1}{n-\omega} - \frac{1}{1-n-\omega} - \frac{1}{1+n-\omega} + \frac{1}{2-n-\omega} + \frac{1}{2+n-\omega} - \text{etc.},\\ &-\frac{1}{n+\omega} + \frac{1}{1-n+\omega} + \frac{1}{1+n+\omega} - \frac{1}{2-n+\omega} - \frac{1}{2+n+\omega} + \text{etc.},\end{aligned}$$

welche zwei Reihen mit Hilfe der vier oben erwähnten, deren Summation bekannt ist, auf II weniger IV reduziert, und daher wird sich die gesuchte Gleichung in endlicher Form so verhalten

$$\frac{2n \triangle y}{f(n-\omega)} = \frac{\pi}{\sin(n-\omega)\pi} - \frac{\pi}{\sin(n+\omega)\pi},$$

welcher Ausdruck auf diesen zurückgeht

$$\frac{2\pi \cos n\pi \sin \omega\pi}{\sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi} = \frac{4\pi \cos n\pi \cdot \sin \omega\pi}{\cos 2\omega\pi - \cos 2n\pi},$$

sodass man für unsere Kurve diese Gleichung hat

$$\frac{n \triangle y}{f(n-\omega)} = \frac{\pi \cos n\pi \sin \omega\pi}{\sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi}.$$

Den Wert $\triangle$ haben wir zuvor durch Integralformeln ausgedrückt gegeben; weil aber aus den oberen Dingen ist

$$\triangle = \frac{1}{\mathfrak{A}(n+\omega)},$$

werden wir durch ein unendlich Produkt haben

$$\triangle = \frac{1}{n+\omega} \cdot \frac{1(1-2n)}{(1-n)^2-\omega^2} \cdot \frac{1(1+2n)}{(1+n)^2-\omega^2} \cdot \frac{2(2-2n)}{(2-n)^2-\omega^2} \cdot \frac{2(2+2n)}{(2+n)^2-\omega^2} \cdot \text{etc.},$$

woher noch deutlicher als aus den Integralformeln klar wird, dass der Wert $\triangle$ unendlich wird, sooft galt

$$\omega = \pm(i \pm n),$$

während i irgendeine ganze Zahl bezeichnet, derselbe Wert $\triangle$ in den Fällen verschwindet, in dem ist

$$n = \pm\frac{1}{2}.$$

Dann wird es aber auch förderlich sein, bemerkt zu haben, wenn, während ω in $1+\omega$ übergeht, der Wert von $\triangle$ mit $\triangle'$ bezeichnet wird, dass sein wird

$$\triangle' = -\frac{(1-n-\omega)\triangle}{n-\omega}.$$

Und wenn auf die gleiche Weise $\triangle''$ dem anstelle von ω angenommenen Wert $2+\omega$ zukommt, wird sein

$$\triangle'' = \frac{-(2-n+\omega)\triangle'}{-(1-n+\omega)} = \frac{-(2-n+\omega)\triangle}{n-\omega}.$$

KOROLLAR 1

§41 Sofern die Größe $\triangle$ von ω abhängt, werde sie wie eine Funktion davon betrachtet und auf diese Weise bezeichnet

$$\triangle = f:\omega;$$

dann wird also sein

$$f:(1+\omega) = \frac{n-1-\omega}{n-\omega} f:\omega$$

und

$$f:(2+\omega) = \frac{n-2-\omega}{n-\omega} f:\omega$$

etc.

Daher, wenn ω irgendeine ganze Zahl bezeichnet, wird man diesen Lehrsatz haben

$$\frac{f:(i+\omega)}{n-i-\omega} = \frac{f:\omega}{n-\omega}.$$

KOROLLAR 2

§42 Weil des Weiteren für negativ genommenes ω gilt

$$f:(\omega)=\frac{n+\omega}{n-\omega}f:\omega,$$

wird sein

$$\frac{f:-\omega}{n+\omega}=\frac{f:\omega}{n-\omega}$$

daher auch im Allgemeinen

$$\frac{f:(i-\omega)}{n-i+\omega}=\frac{f:\omega}{n-\omega}.$$

BEMERKUNG

§43 Dieser Fall entspricht jenem, den wir oben in §25 entwickelt haben, wo die gegebenen Ordinaten auch die Sinus der Abszissen waren; und freilich muss im gegenwärtigen Fall festgelegt werden

$$\theta=\pi,$$

dass gilt

$$f=\sin n\pi$$

und alle gegebenen Punkte auf einer Sinuslinie gelegen sind. Daher folgt aber nicht, dass die Kurve selbst, welche die gefundene Gleichung darbietet, eine Sinuslinie ist, weil unzählige andere Kurven durch dieselben gegebenen

Punkte hindurchgehen können. Daher ist es aber immer noch keinesfalls gewiss, dass der der Abszisse $x = \omega\pi$ zukommende und mit dieser Gleichung definierte Wert

$$\frac{n \triangle y}{(n-\omega)\sin n\pi} = \frac{\pi \cos n\pi \cdot \sin \omega\pi}{\sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi}$$

dem Sinus des Bogens $\pi\omega$ gleich wird, dass $y = \sin \pi\omega$, auch wenn dies in den Fällen $\omega = \pm(i \pm n)$ und $\omega = 0$ wahr ist. Oben haben wir freilich gesehen, dass die Gleichung auch im Fall, in dem ω eine sehr kleine Größe ist, mit der Wahrheit verträglich sein wird, indem $y = \sin \pi\omega$ genommen wird, sodass gilt

$$\triangle = \frac{\pi \cos n\pi}{\sin n\pi},$$

während auch ist

$$\triangle = \frac{\int z^{n-1}\mathrm{d}z(1-z)^{-n} \cdot \int z^{n-1}\mathrm{d}z(1-z)^{n}}{\int z^{n-1}\mathrm{d}z(1-z)^{-2n}},$$

wie ich auch dort bewiesen habe. Damit aber diese Sache leichter im Allgemeinen erforscht werden kann, bemerke ich für das bequemere Ausdrücken des Wertes $\triangle$, dass ist

$$\frac{\int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{-n-\omega}}{\int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{-2n}} = \frac{\int z^{\omega-n}\mathrm{d}z(1-z)^{-n-\omega}}{\int \mathrm{d}z(1-z)^{-2n}} = (1-2n)\int z^{\omega-n}\mathrm{d}z(1-z)^{-n-\omega},$$

wobei gilt

$$n < \frac{1}{2},$$

woher sein wird

$$\triangle = (1-2n)\int z^{\omega-n}\mathrm{d}z(1-z)^{-n-\omega}\cdot\int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{n-\omega}.$$

Aber wenn im Allgemeinen wäre

$$y = \sin\omega\pi,$$

wäre auch

$$\triangle = \frac{(n-\omega)\pi\sin n\pi\cos n\pi}{n\sin(n-\omega)\pi\cdot\sin(n+\omega)\pi}.$$

Die Frage geht also darauf zurück, ob diese Gleichung

$$\begin{aligned}(1-2n)\int z^{\omega-n}\mathrm{d}z(1-z)^{-n-\omega}\cdot\int z^{n+\omega-1}\mathrm{d}z(1-z)^{n-\omega}\\ = \frac{(n-\omega)\pi\sin n\pi\cos n\pi}{n\sin(n-\omega)\pi\cdot\sin(n+\omega)\pi}\end{aligned}$$

auch in anderen Fällen außer den oben erwähnten wahr ist oder nicht. Für dieses Ziel wollen wir den Fall betrachten, in dem gilt

$$n = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{1}{2},$$

wo freilich der zweite Teil wird

$$= \frac{-\frac{1}{4}\cdot\pi\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}} = \pi;$$

der erste Teil wird hingegen sein

$$= \frac{1}{2} \int \frac{z^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}z}{(1-z)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{-\frac{1}{4}} \mathrm{d}z}{(1-z)^{\frac{1}{4}}},$$

die nach Setzen von

$$z = v^4$$

in diese Form übergeht

$$8 \int \frac{v^4 \mathrm{d}v}{\sqrt[4]{(1-v^4)^3}} \cdot \int \frac{v^2 \mathrm{d}v}{\sqrt[4]{(1-v^4)}} = 4 \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt[4]{(1-v^4)^3}} \cdot \int \frac{vv \mathrm{d}v}{\sqrt[4]{(1-v^4)}},$$

deren Wert durch die Dinge, die ich über Formeln von dieser Art bewiesen habe, in Wirklichkeit $= \pi$ wird, was also schon ein vorzüglichess Zeugnis für die Gültigkeit unserer Gleichung ist, welche sich aber auf die folgende Weise vollständig beweisen lässt.

LEHRSATZ

§44 Auf welche Weise auch immer die zwei Zahlen n und ω angenommen werden, diese Gleichung wird mit der Wahrheit verträglich sein

$$(1-2n) \int \frac{z^{\omega-n} \mathrm{d}z}{(1-z)^{n+\omega}} \cdot \int \frac{z^{n+\omega-1} \mathrm{d}z}{(1-z)^{\omega-n}} = \frac{(n-\omega)\pi \sin n\pi \cdot \cos n\pi}{n \sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi},$$

wenn freilich die Integration jener Formeln von der Grenze $z = 0$ bis zur Grenze $z = 1$ erstreckt wird.

BEWEIS

Um diese Integralformeln auf die Form, die ich behandelt habe, zurückzuführen, wollen wir festlegen

$$n+\omega=\frac{\mu}{\lambda} \quad \text{und} \quad \omega-n=\frac{\nu}{\lambda},$$

dass gilt

$$2n=\frac{\mu-\nu}{\lambda}$$

und es muss diese Gleichung bewiesen werden

$$\frac{\lambda-\mu+\nu}{\lambda}\int\frac{z^{\frac{\nu}{\lambda}}\mathrm{d}z}{\sqrt[\lambda]{(1-z)^{\mu}}}\cdot\int\frac{z^{\frac{\mu-\lambda}{\lambda}}\mathrm{d}z}{\sqrt[\lambda]{(1-z)^{\nu}}}=\frac{\nu}{\mu-\nu}\cdot\frac{\pi\sin\frac{\mu-\nu}{\lambda}\pi}{\sin\frac{\nu\pi}{\lambda}\cdot\sin\frac{\mu\pi}{\lambda}}.$$

Es werde nun $z=v^{\lambda}$ gesetzt und man wird haben

$$\lambda(\lambda-\mu+\nu)\int\frac{v^{\lambda+\nu-1}\mathrm{d}v}{\sqrt[\lambda]{(1-v^{\lambda})^{\mu}}}\cdot\int\frac{v^{\mu-1}\mathrm{d}v}{\sqrt[\lambda]{(1-v^{\lambda})^{\nu}}}=\frac{\nu}{\mu-\nu}\cdot\frac{\pi\sin\frac{\mu-\nu}{\lambda}\pi}{\sin\frac{\nu\pi}{\lambda}\cdot\sin\frac{\mu\pi}{\lambda}};$$

audfdie dort einngeführte Weise, diese Integralformeln auszudrücken, wird das erste Glied so dargestellt werden

$$\lambda(\lambda-\mu-\nu)\left(\frac{\lambda+\nu}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda-\nu}\right),$$

was durch die erste Reduktion

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p-\lambda}{p+q-\lambda}\left(\frac{p-\lambda}{q}\right),$$

übergeht in

$$\lambda\nu\binom{\nu}{\lambda-\mu}\binom{\mu}{\lambda-\nu} = \lambda\nu\binom{\lambda-\mu}{\nu}\binom{\lambda-\nu}{\mu}.$$

Aber diese Reduktion

$$\binom{\lambda-q}{p}\binom{\lambda+p-q}{q} = \frac{\pi}{\lambda p \sin\frac{q\pi}{\lambda}}$$

nach Nehmen von

$$p = \mu - \nu \quad \text{und} \quad q = \mu$$

gibt

$$\binom{\lambda-\mu}{\mu-\nu}\binom{\lambda-\nu}{\mu} = \frac{\pi}{\lambda(\mu-\nu)\sin\frac{\mu\pi}{\lambda}}.$$

Es ist aber auch

$$\binom{\lambda-\nu}{\nu} = \frac{\pi}{\lambda\sin\frac{\nu\pi}{\lambda}},$$

deren Produkt ist

$$\binom{\lambda-\nu}{\mu}\binom{\lambda-\nu}{\nu}\binom{\lambda-\mu}{\mu-\nu} = \frac{\pi\pi}{\lambda\lambda(\mu-\nu)\sin\frac{\mu\pi}{\lambda}\cdot\sin\frac{\nu\pi}{\lambda}}.$$

Weiter, weil im Allgemeinen gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right),$$

wird durch Nehmen von

$$p = \lambda - \mu, \quad q = \mu - \nu, \quad \text{und} \quad r = \nu$$

sein

$$\left(\frac{\lambda-\mu}{\mu-\nu}\right)\left(\frac{\lambda-\nu}{\nu}\right) = \left(\frac{\lambda-\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\lambda-\mu+\nu}{\mu-\nu}\right)$$

und wegen

$$\left(\frac{\lambda-p}{p}\right) = \frac{\pi}{\lambda\sin\frac{p\pi}{\lambda}}$$

wird nach Nehmen von

$$p = \mu - \nu$$

sein

$$\left(\frac{\lambda-\mu}{\mu-\nu}\right)\left(\frac{\lambda-\nu}{\nu}\right) = \left(\frac{\lambda-\mu}{\nu}\right)\cdot\frac{\pi}{\lambda\sin\frac{\mu-\nu}{\lambda}\pi}$$

und daher

$$\left(\frac{\lambda-\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda-\mu}{\nu}\right)\cdot\frac{\pi}{\lambda\sin\frac{\mu-\nu}{\lambda}\pi} = \frac{\pi\pi}{\lambda\lambda(\mu-\nu)\sin\frac{\mu\pi}{\lambda}\cdot\sin\frac{\nu\pi}{\lambda}};$$

aus diesen Dingen geht das erste Glied auf diese Form zurück

$$\lambda\nu\left(\frac{\lambda-\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\lambda-\nu}{\mu}\right)=\frac{\nu}{\mu-\nu}\cdot\frac{\pi\sin\frac{\mu-\nu}{\lambda}\pi}{\sin\frac{\mu\pi}{\lambda}\cdot\sin\frac{\nu\pi}{\lambda}},$$

welches die zu beweisende Gleichung selbst ist.

KOROLLAR 1

§45 In der Lehre über Integralformeln von dieser Art

$$\int\frac{v^{p-1}\mathrm{d}v}{\sqrt[\lambda]{(1-v^\lambda)^{\lambda-q}}},$$

welche ich mit diesem Charakter bezeichne

$$\left(\frac{p}{q}\right),$$

welcher $\left(\frac{p}{q}\right)$ äquivalent ist, ist also diese Reduktion von größer Bedeutung, nach welcher ich bewiesen habe zu sein

$$\lambda\nu\left(\frac{\lambda-\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\lambda-\nu}{\mu}\right)=\frac{\nu}{\mu-\nu}\cdot\frac{\pi\sin\frac{\mu-\nu}{\lambda}\pi}{\sin\frac{\mu\pi}{\lambda}\cdot\sin\frac{\nu\pi}{\lambda}},$$

sodass das Produkt zwei solcher Integralformeln $\left(\frac{\lambda-\mu}{\nu}\right)\left(\frac{\lambda-\nu}{\mu}\right)$ allein durch Winkel dargeboten werden kann.

KOROLLAR 2

§46 Wenn im zuerst für $\triangle$ gefundenen Wert gleichermaßen festgelegt wird

$$n+\omega=\frac{\mu}{\nu}\quad\text{und}\quad\omega-n=\frac{\nu}{\lambda},$$

dann aber

$$z = v^\lambda,$$

wird sein

$$\triangle = \lambda \int \frac{v^{\mu-1}\mathrm{d}v}{\sqrt[\lambda]{(1-v^\lambda)^\mu}} \cdot \int \frac{v^{\mu-1}\mathrm{d}v}{\sqrt[\lambda]{(1-v^\lambda)^\nu}} : \int \frac{v^{\mu-1}\mathrm{d}v}{\sqrt[\lambda]{(1-v^\lambda)^{\mu-\nu}}}$$

und daher auf diese Bezeichnungsweise

$$\triangle = \frac{\lambda\left(\frac{\mu}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda-\nu}\right)}{\left(\frac{\mu}{\lambda-\mu+\nu}\right)}$$

oder

$$\triangle = \frac{\lambda\left(\frac{\lambda-\mu}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda-\nu}{\mu}\right)}{\left(\frac{\lambda-\mu+\nu}{\mu}\right)}.$$

Derselbe Wert ist in der Tat auch

$$\triangle = \frac{\nu\pi}{\mu-\nu} \cdot \frac{\sin\frac{\mu-\nu}{\lambda}\pi}{\sin\frac{\mu\pi}{\lambda} \cdot \sin\frac{\nu\pi}{\lambda}}$$

KOROLLAR 3

§47 Weil also für diese letzte Formel sofort gilt

$$\left(\frac{\lambda-\mu}{\mu}\right) = \frac{\pi}{\lambda \sin\frac{\mu\pi}{\lambda}},$$

wird sein

$$\frac{\left(\frac{\lambda-\nu}{\mu}\right)}{\left(\frac{\lambda-\mu+\nu}{\mu}\right)}=\frac{\nu}{\mu-\nu}\cdot\frac{\sin\frac{\mu-\nu}{\lambda}\pi}{\sin\frac{\nu\pi}{\lambda}},$$

deren Gültigkeit aus diesen allgemeinen Lehrsatz gezeigt wird

$$\frac{\left(\frac{p}{q}\right)}{\left(\frac{r}{p}\right)}=\frac{\left(\frac{p+r}{q}\right)}{\left(\frac{p+q}{r}\right)};$$

es wird nämlich sein

$$\frac{\left(\frac{\lambda-\nu}{\mu}\right)}{\left(\frac{\lambda-\mu+\nu}{\mu}\right)}=\frac{\left(\frac{\lambda+\nu}{\lambda-\nu}\right)}{\left(\frac{\lambda+\mu-\nu}{\lambda-\mu+\nu}\right)}=\frac{\nu}{\mu-\nu}\cdot\frac{\left(\frac{\nu}{\lambda-\nu}\right)}{\left(\frac{\mu-\nu}{\lambda-\mu+\nu}\right)}$$

wegen

$$\left(\frac{\lambda+\nu}{\lambda-\nu}\right)=\frac{\nu}{\lambda}\left(\frac{\nu}{\lambda-\nu}\right)\quad\text{und}\quad\left(\frac{\lambda+\mu-\nu}{\lambda-\mu+\nu}\right)=\frac{\mu-\nu}{\lambda}\left(\frac{\mu-\nu}{\lambda-\mu+\nu}\right);$$

dann ist aber

$$\left(\frac{\nu}{\lambda-\nu}\right)=\frac{\pi}{\lambda\sin\frac{\nu\pi}{\lambda}}\quad\text{und}\quad\left(\frac{\mu-\nu}{\lambda-\mu+\nu}\right)=\frac{\pi}{\lambda\sin\frac{\mu-\nu}{\lambda}\pi}.$$

Beispiel II

§48 Es seien die Ordinaten, die den Abszissen

$$n\theta, \quad (1-n)\theta, \quad (1+n)\theta, \quad (2-n)\theta, \quad (2+n)\theta \quad \text{etc.}$$

entsprechen,

$$p = f, \quad q = -f, \quad r = +f, \quad s = -f, \quad t = +f, \quad u = -f \quad \text{etc.},$$

und durch eine endliche Gleichung werde die Relation zwischen der Abszisse $x = \theta\omega$ und der Ordinate $= y$ im Allgemeinen ausfindig gemacht.

Die allgemeine Gleichung des Paragraphen 26 liefert auf diesen Fall angewendet

$$\begin{aligned}\frac{2n \triangle y}{f(n-\omega)} = \frac{1}{n-\omega} + \frac{1}{1-n-\omega} + \frac{1}{1+n-\omega} + \frac{1}{2-n-\omega} + \frac{1}{2+n-\omega} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{n+\omega} - \frac{1}{1-n+\omega} - \frac{1}{1+n+\omega} - \frac{1}{2-n+\omega} - \frac{1}{2+n+\omega} - \text{etc.},\end{aligned}$$

wo wir nun freilich wissen, dass gilt

$$\triangle = \frac{(n-\omega)\pi \sin 2n\pi}{2n \sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi}.$$

Jene Reihe wird aber aus §39 sofort

$$\text{I weniger III} = \frac{\pi}{\tan(n-\omega)\pi} - \frac{\pi}{\tan(n+\omega)\pi} = \frac{\pi \sin 2\omega\pi}{\sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi}$$

nach Einsetzen welcher Summe hervorgeht

$$\frac{y}{f} \cdot \frac{\pi \sin 2n\pi}{\sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi} = \frac{\pi \sin 2\omega\pi}{\sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi}$$

oder

$$y = \frac{f \sin 2\omega\pi}{\sin 2n\pi} = \frac{f \sin \frac{2x\pi}{\theta}}{\sin 2n\pi}.$$

Daher ist also die Kurve erneut eine Linie von Sinus, und wenn man $\theta = 2\pi$ nimmt, dass $f = \sin 2n\pi$ ist, wird sie Ordinate $y = \sin x$ sein.

KOROLLAR 1

§49 Wenn man nimmt

$$\theta = \pi \quad \text{und} \quad f = \tan n\theta = \tan n\pi,$$

werden die gegebenen Punkte auf einer Tangenslinie liegen; und dennoch wird die gefundene Kurve selbst keine Tangenslinie sein; sondern ihre Natur wird mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$y = \frac{\tan n\pi \cdot \sin 2x}{\sin 2n\pi} = \frac{\sin 2x}{2\cos^2 n\pi} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2n\pi}$$

und es wird hier $y = \tan x$ sein, sooft $x = \pm(i \pm n)\pi$ war.

KOROLLAR 2

§50 Wenn wir in der Lösung des ersten Beispiels, in welchem war

$$p = f, \quad q = f, \quad r = -f, \quad s = -f, \quad t = f, \quad u = f \quad \text{etc.},$$

sofort anstelle von $\triangle$ den gefundenen Wert gesetzt hätten, wäre diese Gleichung hervorgegangen

$$y = \frac{f \sin \omega\pi}{\sin n\pi}.$$

Daher wäre es klar gewesen, dass nach Nehmen von $\theta = \pi$ und $f = \sin n\pi$ jene Kurve selbst eine Sinuslinie sein wird.

BEMERKUNG

§51 Es verdient ganz und gar bemerkt zu werden, dass in Problem 4, wo die gegebenen Abszissen eine unterbrochene arithmetische Progression festlegen, der Wert der Größe uneingeschränkt durch Winkel dargeboten werden konnte, obwohl dennoch in Problem 3, wo die gegebenen Abszissen eine wahre arithmetische Progression festlegten, die Integralformel $\triangle$ im Allgemeinen keinesfalls durch Winkel ausgedrückt werden kann. Weil nämlich dort war

$$\triangle = \int z^{n-\omega-1} dz (1-z)^{n-\omega-1},$$

geht diese Formel nach Setzen von $n - \omega = \frac{\nu}{\lambda}$ und $z = v^{\lambda}$ über in

$$\triangle = \lambda \int \frac{v^{\nu-1} dv}{\sqrt[\lambda]{(1-v^{\lambda})^{\lambda-\nu}}} \quad \text{oder} \quad \triangle = \lambda \left(\frac{\nu}{\nu}\right),$$

welche Formel im höchsten Maße transzendente Quadraturen verwickeln kann. Und wenn in jenem Problem die gegebenen Ordinaten wie folgt festgelegt werden

$$p = f, \quad q = -f, \quad r = f, \quad s = -f, \quad t = f, \quad u = -f \quad \text{etc.}$$

und $n = \frac{1}{2}$ war, wird die Gleichung für die durch diese Punkte hindurchgehende Kurve sein

$$\frac{\triangle y}{2(1+2\omega)\omega f} = \frac{4}{1-4\omega\omega} + \frac{4}{9-4\omega\omega} + \frac{4}{1-4\omega\omega} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\triangle y}{2f\omega(1+2\omega)} = \frac{\pi}{2\omega}\tan\omega\pi,$$

so dass gilt

$$y = \frac{\pi f(1+2\omega)\tan\omega\pi}{\triangle},$$

woher, auch wenn genommen wird

$$\theta = \pi \quad \text{und} \quad f = \sin n\theta = \sin\frac{1}{2}\pi = 1,$$

es natürlich nicht folgt, dass $y = \sin\theta\omega = \sin\omega\pi$ sein wird. Weil also durch das erste Beispiel schon gewiss ist, dass gilt

$$y = \frac{f\sin\omega\pi}{\sin n\pi},$$

wollen wir denselben Fall aus dem ersten Problem so entwickeln, dass wir die Werte der einzelnen Koeffizienten A, B, C, D etc. ausfindig machen.

PROBLEM 5

§52 Die oben in Problem 1 festgelegte allgemeine Gleichung so zu bestimmen, dass diesen Abszissen

$$x = n\theta, \quad (1-n)\theta, \quad (1+n)\theta, \quad (2-n)\theta, \quad (2+n)\theta \quad \text{etc.}$$

diese Ordinaten entsprechen

$$y = +f, \qquad +f, \qquad -f, \qquad -f, \qquad +f, \qquad \text{etc.},$$

LÖSUNG

Es werde wie zuvor $x = \theta\omega$ gesetzt und man betrachte die gesuchte Gleichung in dieser Form

$$\begin{gathered} y = A\omega + B\omega(\omega\omega - nn) + C\omega(\omega\omega - nn)(\omega\omega - (1-n)^2) \\ +D\omega(\omega\omega - nn)(\omega\omega - (1-n)^2)(\omega\omega - (1+n)^2) \\ +E\omega(\omega\omega - nn)(\omega\omega - (1-n)^2)(\omega\omega - (1+n)^2)(\omega\omega - (2-n)^2) \\ +\text{etc}, \end{gathered}$$

woher diese Gleichungen abgeleitet werden

$$\begin{aligned} \frac{f}{n} &= A, \\ \frac{f}{1-n} &= A \ + B \cdot 1(1-2n), \\ \frac{-f}{1+n} &= A \ + B \cdot 1(1-2n) \ + C \cdot (1+2n) \cdot 2 \cdot 2n, \\ \frac{-f}{2-n} &= A \ + B \cdot 1(1-2n) \ + C \cdot 2(2-2n) \cdot 1(3-2n) \\ &\qquad + D \cdot 2(2-2n) \cdot 1(3-2n) \cdot 3(1-2n) \\ &\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

und daher die folgenden Werte der Koeffizienten

$$A = \frac{f}{n}, \quad B = \frac{-f}{n(1-n)}, \quad C = \frac{f}{2n(1-n)(1+n)}, \quad D = \frac{-f}{6n(1-n)(1+n)(2-n)},$$

$$D = \frac{f}{24n(1-n)(1+n)(2-n)(2+n)} \quad \text{etc.;}$$

weil diese Progression hinreichend leicht ist, verdient unsere Reihe für den Wert von y, welchen wir schon wissen, dieser zu sein

$$= \frac{f \sin \omega\pi}{\sin n\pi},$$

umso größere Aufmerksamkeit; und diese ist

$$\frac{\sin \omega\pi}{\sin n\pi} = \frac{\omega}{n} - \frac{\omega}{n} \cdot \frac{\omega\omega - nn}{1(1-n)} + \frac{\omega}{n} \cdot \frac{\omega\omega - nn}{1(1-n)} \cdot \frac{\omega\omega - (1-n)^2}{2(1+n)}$$
$$- \frac{\omega}{n} \cdot \frac{\omega\omega - nn}{1(1-n)} \cdot \frac{\omega\omega - (1-n)^2}{2(1+n)} \cdot \frac{\omega\omega - (1+n)^2}{3(2-n)} + \text{etc.},$$

oder wenn Π beständig den vorhergehenden Term bezeichnet, wird das Ganze sein

$$\frac{\sin \omega\pi}{\sin n\pi} = \frac{\omega}{n} - \Pi \cdot \frac{\omega\omega - nn}{1(1-n)} + \Pi \cdot \frac{\omega\omega - (1-n)^2}{2(1+n)} - \Pi \cdot \frac{\omega\omega - (1+n)^2}{3(2-n)}$$
$$+ \Pi \cdot \frac{\omega\omega - (2-n)^2}{4(2+n)} - \Pi \cdot \frac{\omega\omega - (2+n)^2}{5(3-n)} + \text{etc.}$$

Wenn daher alle Terme mit dem selben Vorzeichen behaftet verlangt werden; wird sein

$$\frac{\sin \omega\pi}{\sin n\pi} = \frac{\omega}{n} + \frac{\omega}{n} \cdot \frac{nn - \omega\omega}{1(1-n)} + \frac{\omega}{n} \cdot \frac{nn - \omega\omega}{1(1-n)} \cdot \frac{(1-n)^2 - \omega\omega}{2(1+n)}$$
$$+ \frac{\omega}{n} \cdot \frac{nn - \omega\omega}{1(1-n)} \cdot \frac{(1-n)^2 - \omega\omega}{2(1+n)} \cdot \frac{(1+n)^2 - \omega\omega}{3(2-n)}$$
$$+ \frac{\omega}{n} \cdot \frac{nn - \omega\omega}{1(1-n)} \cdot \frac{(1-n)^2 - \omega\omega}{2(1+n)} \cdot \frac{(1+n)^2 - \omega\omega}{3(2-n)} \cdot \frac{(2-n)^2 - \omega\omega}{4(2+n)}$$
$$\text{etc.}$$

Diese Reihe scheint umso größerer Aufmerksamkeit würdig, weil sie von der gewohnten Beschaffenheit von Reihen sehr stark abweicht und in ihr sogar zwei beliebige Zahlen n und ω auftauchen.

KOROLLAR 1

§53 Wenn die Zahl ω verschwindet, dass $\sin \omega\pi = \omega\pi$ wird, wird man nach Division durch ω diese Gleichung haben

$$\frac{\pi}{\sin n\pi} = \frac{1}{n} + \frac{n}{1(1-n)} + \frac{n(1-n)}{1 \cdot 2(1+n)} + \frac{n(1-n)(1+n)}{1 \cdot 2 \cdot 3(2-n)}$$
$$+ \frac{n(1-n)(1+n)(2-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(2+n)} + \text{etc.},$$

woher nach Nehmen von $n = \frac{1}{2}$ wegen $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ sein wird

$$\pi = 2 + 1 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 5} + \text{etc.}$$

oder

$$\pi = 2 + \frac{1}{2 \cdot 2^1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 2^3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 82^7 \cdot 9} + \text{etc.}$$

$$+1+\frac{1}{2\cdot 2^2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2^4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^6\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 82^8\cdot 9}+\text{etc.};$$

weil die zweite dieser Reihen die Hälfte der ersten ist, wird die Summe der zweiten $=\frac{\pi}{3}$ sein, deren Begründung freilich daher offenbar ist, weil gilt

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-xx}}=\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\text{etc.},$$

woher jene Reihe $=\frac{\arcsin x}{x}$ nach Nehmen von $x=\frac{1}{2}$ und daher $2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ wird.

Korollar 2

§54 Wenn die eine Zahl n verschwindet, dass $\sin n\pi=n\pi$ wird und die Gleichung mit n multipliziert wird, wird entspringen

$$\frac{\sin\omega\pi}{\pi}=\omega-\frac{\omega^3}{1}+\frac{\omega^3(\omega^2-1)}{1\cdot 2\cdot 1^2}-\frac{\omega^3(\omega^2-1)(\omega^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1^2\cdot 2}+\frac{\omega^3(\omega^2-1)(\omega^2-1)(\omega^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1^2\cdot 2^2}$$
$$-\frac{\omega^3(\omega^2-1)(\omega^2-1)(\omega^2-4)(\omega^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot 3}+\text{etc.},$$

welche Reihe durch ω dividiert in die zwei folgenden aufgelöst wird

$$\frac{\sin\omega\pi}{\omega\pi}=1+\frac{\omega^2(\omega^2-1)}{1\cdot 2\cdot 1^2}+\frac{\omega^2(\omega^2-1)^2(\omega^2-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1^2\cdot 2^2}+\frac{\omega^2(\omega^2-1)^2(\omega^2-4)^2(\omega^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\text{etc.}$$
$$-\frac{\omega^2}{1}-\frac{\omega^2(\omega^2-1)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1^2\cdot 2}-\frac{\omega^2(\omega^2-1)^2(\omega^2-4)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot 3}-\frac{\omega^2(\omega^2-1)^2(\omega^2-4)^2(\omega^2-9)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4}-\text{etc.}$$

Wir wollen hier $\omega=\frac{1}{2}$ setzen; es wird werden

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2^5} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2^{10}} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 2^{15}} - \text{etc.}$$
$$- \frac{1\cdot 1}{2^2} - \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2^6} - \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^{10}} - \text{etc.},$$

welche letzte Reihe so dargestellt werden kann

$$-\frac{1}{2^2} - \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 2^7} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{12}} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 2^{17}} - \text{etc.}$$

KOROLLAR 3

§55 Wenn $n = \frac{1}{2}$ war, dass $\sin n\pi = 1$ ist, werden die Faktoren, aus denen die einzelnen Terme der Reihe gebildet werden müssen, sein

$$\frac{2\omega}{1} \cdot \frac{1-4\omega\omega}{1\cdot 2} \cdot \frac{1-4\omega\omega}{3\cdot 4} \cdot \frac{9-4\omega\omega}{3\cdot 6} \cdot \frac{9-4\omega\omega}{5\cdot 8} \cdot \frac{25-4\omega\omega}{5\cdot 10} \cdot \frac{25-4\omega\omega}{7\cdot 12} \cdot \text{etc.}$$

und die Summe der Reihe wird $\sin\omega\pi$ sein, es ist natürlich

$$\sin\omega\pi = 2\omega + \frac{2\omega(1-4\omega\omega)}{1\cdot 2} + \frac{2\omega(1-4\omega\omega)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2\omega(1-4\omega\omega)^2(9-4\omega\omega)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.},$$

woher nach Nehmen von $\omega = 1$ sein muss

$$0 = 2 - 3 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3\cdot 3} + \frac{5}{2^6\cdot 3} + \frac{7}{2^7\cdot 3} + \frac{7}{2^9\cdot 5} + \frac{9}{2^{10}\cdot 7} + \frac{5\cdot 9}{2^{14}\cdot 7} + \text{etc.},$$

deren Gültigkeit dem, der die Rechnung durchführt, bald klar zu tage treten wird.

§55 Für diesen Fall verdient auch die oben gefundene Lösung aufmerksamer betrachtet zu werden, die aus §36 wegen

$$\triangle = \frac{(n-\omega)\pi \sin 2n\pi}{2n\sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n-\omega)\pi} \quad \text{und} \quad y = \frac{f \sin \omega\pi}{\sin n\pi},$$

weil ja ist

$$p = f, \quad q = f, \quad r = -f, \quad s = -f, \quad t = f, \quad u = f \quad \text{etc.},$$

in dieser Gleichung enthalten ist

$$\frac{\pi \cos n\pi \cdot \sin \omega\pi}{\omega \sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi}$$
$$= \frac{1}{nn-\omega\omega} - \frac{1}{(1-n)-\omega^2} - \frac{1}{(1+n)-\omega^2} + \frac{1}{(2-n)-\omega^2} + \frac{1}{(2+n)-\omega^2} + \text{etc.},$$

welche Reihe in höchsten Maße von der abweicht, die wir gerade gefunden haben. Über diese Reihe bemerke aber ich die folgenden Dinge:

I. Wenn ω verschwindet, wird sein

$$\frac{\pi\pi \cos n\pi}{(\sin n\pi)^2} = \frac{1}{nn} - \frac{1}{(1-n)^2} - \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{(2-n)^2} + \frac{1}{(2+n)^2} - \frac{1}{(3-n)^2} - \text{etc.};$$

aber wenn darüber hinaus n verschwindet, entsprießt der folgende Umstand

$$\frac{1}{nn} = \frac{1}{nn} - \frac{2}{1} + \frac{2}{4} - \frac{2}{9} + \frac{2}{16} - \text{etc.}$$

Um diesen aber zu beseitigen, wollen wir die Zahl n nur als verschwindend ansehen, und weil gilt

$$\cos n\pi = 1 - \frac{1}{2}nn\pi\pi$$

und auch

$$\sin n\pi = n\pi - \frac{1}{6}n^3\pi^3 = n\pi\left(1 - \frac{1}{6}nn\pi\pi\right),$$

wird sein

$$\frac{\cos n\pi}{(\sin n\pi)^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}nn\pi\pi}{nn\pi\pi(1 - \frac{1}{3}nn\pi\pi)} = \frac{1 - \frac{1}{6}nn\pi\pi}{nn\pi\pi};$$

daher wird diese wahre Gleichung erhalten

$$\frac{1}{nn} - \frac{1}{6}\pi\pi = \frac{1}{nn} - \frac{2}{1} + \frac{2}{4} - \frac{2}{9} + \frac{2}{16} - \frac{2}{25} + \text{etc.}$$

Es ist nämlich

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.} = \frac{1}{12}\pi\pi.$$

II. Wir wollen nun $n = 0$ setzen und wir werden haben

$$-\frac{\pi}{\omega \sin \omega\pi} = -\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{1-\omega^2} - \frac{1}{1-\omega^2} + \frac{1}{4-\omega^2} + \frac{1}{4-\omega^2} - \frac{1}{9-\omega^2} - \frac{1}{9-\omega^2} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\pi}{\omega \sin \omega\pi} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{2}{1-\omega^2} - \frac{2}{4-\omega^2} + \frac{2}{9-\omega^2} - \frac{2}{16-\omega^2} + \frac{2}{25-\omega^2} - \text{etc.}$$

woher wir diese bemerkenswerte Summation erlangen

$$\frac{1}{1-\omega^2} - \frac{1}{4-\omega^2} + \frac{1}{9-\omega^2} - \frac{1}{16-\omega^2} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2\omega \sin \omega\pi} - \frac{1}{2\omega\omega},$$

deren Gültigkeit ich anderswo bewiesen habe. Daher wird aber, nachdem ω unendlich klein angenommen worden ist, wegen

$$\sin \omega\pi = \omega\pi\left(1 - \frac{1}{6}\omega^2\pi^2\right)$$

die Summe der Reihe

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

wie zuvor berechnet zu

$$\frac{1}{2\omega\omega(1-\frac{1}{6}\omega^2\pi^2)} - \frac{1}{2\omega\omega} = \frac{1}{12}\pi\pi.$$

III. Wenn $n = \frac{1}{2}$ genommen wird, verschwindet wegen $\cos n\pi$ auch die Reihe selbst, während sich natürlich in Wirklichkeit alle Terme gegenseitig aufheben. Was aber passiert, wenn n unendlich wenig von $\frac{1}{2}$ abweicht, dafür werde eine Differentiation nach der Variable n durchgeführt, woher wird

$$-\frac{n\pi \sin n\pi \sin \omega\pi(1+\cos(n-\omega)\pi \cdot \cos(n+\omega)\pi)}{\omega(\sin(n-\omega)\pi \cdot \sin(n+\omega)\pi)^2} = -\frac{2n}{(nn-\omega\omega)^2} - \frac{2(1-n)}{((1-n)^2-\omega^2)^2}$$

$$\frac{2(1+n)}{((1+n)^2-\omega^2)^2}+\frac{2(2-n)}{((2-n)^2-\omega^2)^2}-\frac{2(2+n)}{((2+n)^2-\omega^2)^2}-\text{etc.}$$

Nun werde also $n=\frac{1}{2}$ genommen und es wird sein

$$-\frac{\pi\pi\sin\omega\pi}{\omega(\cos\omega\pi)^2}=-\frac{16}{(1-4\omega^2)^2}-\frac{16}{(1-4\omega^2)^2}+\frac{3\cdot 16}{(9-4\omega^2)^2}+\frac{3\cdot 16}{(9-4\omega^2)^2}-\text{etc.}$$

oder

$$\frac{\pi\pi\sin\omega\pi}{32\omega(\cos\omega\pi)^2}=\frac{1}{(1-4\omega^2)^2}-\frac{3}{(9-4\omega^2)^2}+\frac{5}{(25-4\omega^2)^2}-\frac{7}{(49-4\omega^2)^2}+\text{etc.},$$

woher nach Nehmen von $\omega=0$ folgt, dass sein wird

$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{etc.},$$

was freilich schon anderswoher bekannt ist.

Aber die im gegenwärtigen Problem gefundene Reihe scheint um Vieles tiefer liegender. Ja sogar der in Korollar 1 entwickelte Fall, auch wenn er im höchsten Maße partikulär ist, ist einer sorgfältigeren Entwicklung würdig, die ich im folgenden Problem zu erledigen versuchen werde.

Problem 6

§57 Wenn n irgendeine Zahl ist, nach der Summe dieser Reihe zu suchen

$$s=\frac{1}{n}+\frac{n}{1(1-n)}+\frac{n(1-n)}{1\cdot 2(1+n)}+\frac{n(1-n)(1+n)}{1\cdot 2\cdot 3(2-n)}+\frac{n(1-n)(1+n)(2-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(2+n)}+\text{etc.},$$

welche wir freilich schon zuvor [§53] gefunden haben zu sein

$$s = \frac{\pi}{\sin n\pi}.$$

LÖSUNG

Weil also in dieser Reihe das Fortschreitungsgesetz unterbrochen ist, wird es passend sein, sie in zwei aufzuteilen. Wir wollen also festlegen

$$P = \frac{1}{n} + \frac{n(1-n)}{1\cdot 2(1+n)}$$
$$+\frac{n(1-n)(1+n)(2-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(2+n)} + \frac{n(1-n)(1+n)(2-n)(2+n)(3-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(3+n)} + \text{etc.},$$
$$Q = \frac{n}{1(1-n)} + \frac{n(1-n)(1+n)}{1\cdot 2\cdot 3(2-n)} + \frac{n(1-n)(1+n)(2-n)(2+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(3-n)} + \text{etc.},$$

sodass gilt

$$s = P + Q.$$

Nun Im Begriff, nach den Summen dieser Reihen zu suchen, nehme ich die folgenden aus der Lehre der Winkel entnommenen Reihen zur Hilfe

$$\frac{\cos\mu\varphi}{\cos\varphi} = 1 + \frac{(1-\mu)(1+\mu)}{1\cdot 2}\sin^2\varphi + \frac{(1-\mu)(1+\mu)(3-\mu)(3+\mu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4\varphi + \text{etc.},$$

$$\frac{\sin\nu}{\cos\varphi} = \nu\sin\varphi + \frac{\nu(2-\nu)(2+\nu)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin^3\varphi + \frac{\nu(2-\nu)(2+\nu)(4-\nu)(4+\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin^5\varphi + \text{etc.}$$

und zuerst werde ich jene freilich auf die erste Form P anwenden. Weil also diese Brüche

$$\frac{(1-\mu)(1+\mu)}{n(1-n)}, \quad \frac{(3-\mu)(3+\mu)}{(1+n)(2-n)}, \quad \frac{(5-\mu)(5+\mu)}{(2+n)(3-n)} \quad \text{etc.}$$

gleich sein müssen, schließe ich, dass $\mu = 1 - 2n$ genommen werden muss, woher sein wird

$$\frac{\cos(1-2n)\varphi}{\cos\varphi} = 1 + \frac{n(1-n)}{1\cdot 2}\cdot 2^2\sin^2\varphi + \frac{n(1-n)(1+n)(2-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 2^4\sin^4\varphi + \text{etc.}$$

Wir wollen auf beiden Seiten mit $d\varphi\sin^{2n-1}\varphi\cos\varphi$ multiplizieren und integrieren, es wird werden

$$\begin{aligned}\int d\varphi\sin^{2n-1}\varphi\,\cos(1-2n)\varphi = \frac{1}{2n}\cdot\sin^{2n}\varphi + \frac{n(1-n)}{1\cdot 2(n+1)}\cdot 2\sin^{2n+2}\varphi \\ + \frac{n(1-n)(1+n)(2-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(n+2)}\cdot 2^3\sin^{2n+4}\varphi + \text{etc.}\end{aligned}$$

Nun werde nach der Integration $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ oder $\varphi = 30^\circ$ gesetzt und es wird sein

$$P = 2^{2n+1}\int d\varphi\sin^{2n-1}\varphi\,\cos(1-2n)\varphi;$$

die Reihe Q wird hingegen leicht aus der anderen bekannten abgeleitet, indem $\nu = 2n$ genommen wird, woher wird

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2n\varphi}{\cos\varphi} = n\cdot 2\sin\varphi + \frac{n(1-n)(1+n)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2^3\sin^3\varphi \\ + \frac{n(1-n)(1+n)(2-n)(2+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot 2^5\sin^5\varphi + \text{etc.}\end{aligned}$$

Es werde mit $d\varphi\sin^{-2n}\varphi\,\cos\varphi$ multipliziert und integriert; es wird sein

$$\int \mathrm{d}\varphi \sin^{-2n}\varphi\ \sin 2n\varphi = \frac{n}{1(1-n)} \cdot \sin^{2-2n}\varphi + \frac{n(1-n)(1+n)}{1\cdot 2\cdot 3(2-n)} \cdot 2^2 \sin^{4-2n}\varphi + \text{etc.}$$

Es werde in gleicher Weise nach durchgeführter Integration $\sin\varphi = \frac{1}{2}$ oder $\varphi = 30^\circ$ gesetzt und es die Reihe hervorgehen als

$$Q = 2^{2-2n} \int \mathrm{d}\varphi \sin^{-2n}\varphi\ \sin 2n\varphi.$$

Deshalb wird die Summe der vorgelegten Reihe so ausgedrückt werden, dass gilt

$$s = 2^{2n+1} \int \mathrm{d}\varphi \sin^{2n-1}\varphi \cos(1-2n)\varphi + 2^{2-2n} \int \mathrm{d}\varphi \sin^{-2n}\varphi\ \sin 2n\varphi,$$

und weil diese Summe schon anderswoher bekannt ist, wird man haben

$$\frac{\pi}{\sin n\pi} = 4 \int \mathrm{d}\varphi\ \cos(1-2n)\varphi\ (2\sin\varphi)^{2n-1} + 4 \int \mathrm{d}\varphi\ \sin 2n\varphi\ (2\sin\varphi)^{-2n}.$$

Korollar 1

§58 Wenn $2n = \frac{1-\lambda}{2}$ gesetzt wird, wird $1 - 2n = \frac{1-\lambda}{2}$ sein, nach welcher Festlegung unsere Gleichung gefälliger wird, und es wird sein

$$\frac{\pi}{\sin \frac{1-\lambda}{4}\pi} = 4 \int \frac{\mathrm{d}\varphi \cos \frac{1+\lambda}{2}\varphi}{(2\sin\varphi)^{\frac{1+\lambda}{2}}} + 4 \int \frac{\mathrm{d}\varphi \sin \frac{1-\lambda}{2}\varphi}{(2\sin\varphi)^{\frac{1-\lambda}{2}}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\cos\frac{\lambda\pi}{4} - \sin\frac{\lambda\pi}{4}},$$

nachdem nach der Integration $\varphi = 30^\circ$ gesetzt worden ist.

KOROLLAR 2

§59 Auf die gleiche Weise wird für negativ genommenes λ sein

$$\frac{\pi}{\sin\frac{1+\lambda}{4}\pi} = 4\int\frac{d\varphi\cos\frac{1-\lambda}{2}\varphi}{(2\sin\varphi)^{\frac{1-\lambda}{2}}} + 4\int\frac{d\varphi\sin\frac{1+\lambda}{2}\varphi}{(2\sin\varphi)^{\frac{1+\lambda}{2}}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\cos\frac{\lambda\pi}{4}+\sin\frac{\lambda\pi}{4}},$$

wo es freilich förderlich sein wird bemerkt zu haben, dass in allen Fällen, welche sich entwickeln lassen, tatsächlich derselbe Wert dieser Integralformeln aufgefunden wird, den wir hier dargeboten haben.